№17 (88) 2010
Выпуск 20
НАУЧНЫЙ РЕЦЕНЗИРУЕМЫЙ ЖУРНАЛ

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ
Белгородского государственного университета
Математика Физика

Belgorod State University
Scientific bulletin
Mathematics & Physics

Основан в 1995 г.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, выпускаемых в Российской Федерации, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Учредитель:
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Белгородский государственный университет»

Издатель:
Белгородский государственный университет.
Издательство БелГУ

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охраны культурного наследия

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-21121 от 19 мая 2005 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Редактор *Т.Г. Лагутина*
Компьютерная вёрстка
Ю.П. Вирченко, Н.А. Гапоненко

E-mail: virch@bsu.edu.ru
Подписано в печать 15.09.2010
Формат 60×84/8
Гарнитура Georgia
Усл. п. л. 17,09
Тираж 1000 экз.
Заказ 211

Подписные индексы в каталоге агентства «Роспечать» – 81631,
в объединенном каталоге «Пресса России» – 39723

Оригинал-макет тиражирован в издательстве Белгородского государственного университета
Адрес: 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

№ 17 (88) 2010
Issue 20
SCIENTIFIC PEER-REVIEWED JOURNAL

Belgorod State University Scientific bulletin
Mathematics & Physics

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ
Белгородского государственного университета
Математика Физика

Founded in 1995

The Journal is included into the list of the leading peer-reviewed journals and publications coming out in the Russian Federation that are recommended for publishing key results of the theses for Doktor and Kandidat degree-seekers.

Founder:
State educational establishment of higher professional education
«Belgorod State University»

Publisher:
Belgorod State University
BSU Publishing house

The journal is registered in Federal service of control over law compliance in the sphere of mass media and protection of cultural heritage

Certificate of registration of mass media ПИ № ФС 77-21121 May 19, 2005.

CONTENTS

Editor *T.G. Lagutina*
Dummy layout by *Yu.P. Virchenko*,
N.A. Gaponenko
e-mail: virch@bsu.edu.ru

Passed for printing 15.09.2010
Format 60x84/8
Typeface Georgia
Printer's sheets 17,09
Circulation 1000 copies
Order 211

Subscription reference in Rospechat' agency catalogue – 81631,
In joint catalogue Pressa Rossii – 39723

Dummy layout is replicated at
Belgorod State University Publishing House
Address: 85, Pobedy str., Belgorod, Russia, 308015

УДК 517.95

О СПЕКТРЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ДВУХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

О.В. Алексеева

Елецкий государственный университет им.И.А.Бунина,
ул. Коммунаров, 28, Елец, 399770, Россия, e-mail: o.v.alexeeva@gmail.com

Аннотация. Для замкнутых дифференциальных операторов, порождённых задачей Дирихле для эллиптических систем первого и второго типа, изучены спектры. В случае эллиптической системы первого типа спектр располагается в левой полуплоскости ($\mathrm{Re}\, z \leqslant 0$), а в случае эллиптической системы второго типа – на вещественной прямой ($\mathrm{Im}\, z = 0$) комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Спектр является дискретным.

Ключевые слова: Спектр, замкнутый дифференциальный оператор, эллиптические системы, тензорные произведения гильбертовых пространств, базис

Работа посвящена описанию спектра дифференциальных операторов, порождённых задачей Дирихле для двух эллиптических систем

$$\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = \lambda u^1 + f^1, \quad \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} = \lambda u^2 + f^2, \quad \lambda \in \mathbb{C}; \tag{1}$$

$$-\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = \lambda u^1 + f^1, \quad \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} = \lambda u^2 + f^2, \quad \lambda \in \mathbb{C}; \tag{2}$$

рассматриваемых в области $\Omega = (0, \pi)^2$ евклидова пространства $\mathbb{R}^2_{t,x}$. Системы (1) и (2) для удобства будем называть *эллиптическими системами первого и второго типа* соответственно. Присоединив к уравнениям (1) и (2) условие Дирихле

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{3}$$

получим граничные задачи (1), (3) и (2), (3).

Отметим, что система (2) равносильна системе (1) в следующем смысле: после умножения первого уравнения системы (1) на -1 и формальной замены $-f^1$ на f^1 (в силу произвольности правой части), получаем систему (2). Эти рассуждения наводят на мысль о совпадении свойств разрешимости граничных задач для данных систем безотносительно к условиям, определяющим граничную задачу. Однако, исследования показывают, что спектральные свойства рассматриваемых дифференциальных операторов различны; они в некотором смысле аналогичны тем отличиям, которые проявились при сопоставлении слабой иррегулярности сильной в работе [1], а также при изучении гиперболических систем в [7].

Для систем Коши-Римана имеется ряд глубоких результатов, относящихся к описанию правильных граничных условий [2] в областях специального вида. Описанию регулярных граничных задач для более общих систем уравнений при числе переменных более двух посвящены работы [3], [4]. Сильно и усиленно эллиптическим системам посвящены работы [5], [6] соответственно. Однако спектральные свойства этих граничных задач и граничных задач иного типа почти не изучены.

Обозначим через $e_1 = (1,0)^{\text{т}}$, $e_2 = (0,1)^{\text{т}}$ ортонормированный базис евклидова пространства $\mathcal{E}^2$ вектор-столбцов, а через $\mathcal{U}$ – унитарное пространство элементов $u = u^1 e_1 + u^2 e_2$; $u^k \in \mathbb{C}$; $k = 1,2$; со скалярным произведением $(u, v;\ \mathcal{U}) = u^1\overline{v^1} + u^2\overline{v^2}$. Пусть $\mathcal{H}^2_{t,x} = \mathcal{L}^2_2(\Omega)$ – гильбертово пространство комплекснозначных вектор-функций $u : \Omega \to \mathbb{C}^2$ с нормой $|u;\ \mathcal{H}^2_{t,x}|$, задаваемой формулой

$$|u; \mathcal{H}^2_{t,x}|^2 = \iint\limits_{\Omega} |u(\tau,\xi);\ \mathcal{U}|^2\, d\tau\, d\xi\,.$$

Пусть также $\mathfrak{D}$ – линейное многообразие гладких комплекснозначных вектор-функций $u \in \mathbb{C}\left(\overline{\Omega}\right) \cap \mathbb{C}^{(2)}\left(\Omega\right)$, удовлетворяющих условиям (3).

1. Эллиптическая система первого типа. Обозначая через $\widetilde{L}$ оператор, областью определения которого является $\mathfrak{D}$, а множество значений определяется правой частью (1), получаем эллиптический дифференциальный оператор; этот оператор не замкнут. Применяя в $\mathcal{H}^2_{t,x}$ стандартную процедуру замыкания, получаем замкнутое расширение L оператора $\widetilde{L}$. В этом случае говорят, что (замкнутый) оператор $L : \mathcal{H}^2_{t,x} \to \mathcal{H}^2_{t,x}$ порождён задачей (1), (3). Изучим его спектр. Говоря о спектре замкнутого оператора, мы следуем терминологии, принятой в монографии [8, с. 620]. Резольвентное множество, спектр, точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр оператора L обозначим через ρL, σL, $P\sigma L$, $C\sigma L$ и $R\sigma L$ соответственно.

Теорема 1. *Спектр σL оператора L, порождённого задачей (1), (3), состоит из замыкания $\overline{P\sigma L}$ на комплексной плоскости его точечного спектра $P\sigma L$. Множество $C\sigma L = \sigma L \backslash P\sigma L$ образует непрерывный спектр оператора L. Точечный спектр оператора L даётся формулой*

$$\lambda_{m,k,s} = -k^2 + i(-1)^m s^2; \quad m = 1,2; \quad k \in \mathbb{N}; \quad s \in N\,. \tag{4}$$

Собственная вектор-функция оператора L, принадлежащая его собственному значению (4), представима в виде

$$u_{m,k,s}(t,x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(ie_1 + (-1)^{m+1}e_2\right)\sin(kt)\sin(sx)$$

Последовательность $\{u_{m,k,s}(t,x) : m = 1,2;\ k \in \mathbb{N};\ s \in \mathbb{N}\}$ собственных вектор-функции оператора L образует ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}^2_{t,x}$.

$\square$ Достаточно заметить, что последовательность $\{u_{m,k,s}(t) :\ m = 1,2;\ k \in \mathbb{N}\}$, $u_{m,k,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(ie_1 + (-1)^{m+1}e_2\right)\sin(kt)$, является полной и ортонормированной в $\mathcal{H}^2_t = \mathcal{H}_t \oplus \mathcal{H}_t$, $\mathcal{H}_t = \mathcal{L}_2[0,\pi]$, и воспользоваться, доказанным в [7], представлением $\mathcal{H}^2_{t,x}$ в виде тензорного произведения гильбертовых пространств $\mathcal{H}^2_t$ и $\mathcal{H}_x$, то есть формулой $\mathcal{H}^2_{t,x} = \mathcal{H}^2_t \otimes \mathcal{H}_x$, где $\mathcal{H}_x = \mathcal{L}_2[0,\pi]$. $\blacksquare$

2. Эллиптическая система второго типа. Обозначая через $\widetilde{L}$ оператор, областью определения которого является $\mathfrak{D}$, а множество значений определяется правой частью (2), получаем эллиптический дифференциальный оператор; этот оператор не замкнут. Применяя в $\mathcal{H}^2_{t,x}$ стандартную процедуру замыкания, получаем замкнутое расширение L оператора $\widetilde{L}$. В этом случае говорят, что (замкнутый) оператор $L:\mathcal{H}^2_{t,x}\to\mathcal{H}^2_{t,x}$ порождён задачей (2), (3). Изучим его спектральные свойства.

Теорема 2. *Спектр σL оператора L, порождённого задачей (2), (3), состоит из замыкания $\overline{P\sigma L}$ на комплексной плоскости его точечного спектра $P\sigma L$. Множество $C\sigma L = \sigma L\setminus P\sigma L$ образует непрерывный спектр оператора L. Точечный спектр оператора L даётся формулой*

$$\lambda_{m,k,s} = (-1)^{m+1}\sqrt{k^4+s^4};\quad m=1,2;\quad k\in\mathbb{N};\quad s\in N. \tag{5}$$

Собственная вектор-функция оператора L, принадлежащая его собственному значению (5), представима в виде

$$u_{m,k,s}(t,x) = C_{m,k,s}\left((\lambda_{m,k,s}+(-1)^{m+1}k^2)e_m - s^2e_{3-m}\right)\sin(kt)\sin(sx),$$

$$C_{m,k,s} = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{k^4+s^4+k^2\sqrt{k^4+s^4}}}.$$

Последовательность

$$\{u_{m,k,s}(t,x) : m=1,2;\ k\in\mathbb{N};\ s\in\mathbb{N}\} \tag{6}$$

собственных вектор-функции оператора L образует ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}^2_{t,x}$.

Пусть S – некоторое счётное множество индексов s и последовательность $\{\varphi^s(x):\ s\in S\}$ является базисом в $\mathcal{H}_x$. Нижеследующие леммы 1, 2 показывают, что последовательность (6) является базисом в $\mathcal{H}^2_{t,x}$.

Лемма 1. *Если для каждого $s\in S$ множество $\{v_{k,s}(t):\ k\in K_s\}$ вектор-функций $v_{k,s}:[0;\pi]\to\mathbb{C}^2$ полно в $\mathcal{H}^2_t$, то множество $\{v_{k,s}(t)\varphi^s(x):\ s\in S,\ k\in K_s\}$ полно в $\mathcal{H}^2_{t,x}$.*

□ Пусть f – произвольный элемент пространства $\mathcal{H}^2_{t,x}$. Известно [7], что $\mathcal{H}^2_{t,x}=\mathcal{H}_t\otimes\mathcal{H}^2_x$. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ найдется такой конечный набор $\{\varphi^{s_m}:\ m=1,2,\ldots,N\}$, что

$$C=\left|f-\sum_{m=1}^{N} f_{s_m}\varphi^{s_m};\ \mathcal{H}^2_{t,x}\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $f_{s_m}\in\mathcal{H}^2_t$. Пусть $M=\max\limits_{1\leqslant m\leqslant N}|\varphi^{s_m};\mathcal{H}_x|$. Множество $\{v_{k,s}(t):\ k\in K_s\}$ полно в $\mathcal{H}^2_t$. Подберем для каждого $m=1,2,\ldots,N$ линейную комбинацию $\sum\limits_{n=1}^{N_m} f_{k_n,s_m}v_{k_n,s_m}$, $f_{k_n,s_m}\in\mathbb{C}$, его элементов так, чтобы

$$C_m=\left|f_{s_m}-\sum_{n=1}^{N_m} f_{k_n,s_m}v_{k_n,s_m};\ \mathcal{H}^2_t\right| < \frac{\varepsilon}{2MN}.$$

Теперь, на основании свойств нормы и ранее полученных оценок, получаем неравенство

$$\left| f - \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N_m} f_{k_n,s_m} \varphi_{s_m} v_{k_n,s_m};\ \mathcal{H}^2_{t,x} \right| \leqslant C + M \sum_{m=1}^{N} C_m < \frac{\varepsilon}{2} + M \frac{\varepsilon}{2MN} N = \varepsilon,$$

которое дает утверждаемую полноту. ■

Лемма 2. *Если для каждого индекса $s \in S$ последовательность $\{v_{k,s}(t):\ k \in K_s\}$ вектор-функций $v_{k,s} : [0;\pi] \to \mathbb{C}^2$ образует базис в $\mathcal{H}^2_t$, то базис в $\mathcal{H}^2_{t,x}$ образует последовательность $\{v_{k,s}(t)\varphi^s(x):\ k \in K_s,\ s \in S\}$.*

□ Так как $\mathcal{H}^2_{t,x} = \mathcal{H}^2_t \otimes \mathcal{H}_x$, то для любого элемента $f \in \mathcal{H}^2_{t,x}$ справедливо в $\mathcal{H}^2_{t,x}$ представление $f = \sum\limits_{s\in S} f_s \varphi^s$, в котором элементы $f_s \in \mathcal{H}^2_t$ определены однозначно. Последовательность $\{v_{k,s} : k \in K_s\}$ является базисом в $\mathcal{H}^2_t$; поэтому для каждого элемента $f_s \in \mathcal{H}^2_t$ справедливо в $\mathcal{H}^2_t$ представление $f_s = \sum\limits_{k\in K_s} f_{k,s} v_{k,s}$, где коэффициенты $f_{k,s} \in \mathbb{C}$ также определены однозначно. В силу леммы 1 получаем единственное представление $f = \sum\limits_{s\in S} \sum\limits_{k\in K_s} f_{k,s} \varphi^s v_{k,s}$. ■

Доказательство Теоремы 1. Утверждение теоремы следует из того, что базис (6) в пространстве $\mathcal{H}^2_{t,x}$ ортонормированный. ■

Литература

1. Дезин А.А. О слабой и сильной иррегулярности // Дифференц. уравнения. – 1981. – 17,10. – С.1851-1858.

2. Дезин А.А. Теоремы существования и единственности решений граничных задач для уравнений с частными производными в функциональных пространствах // Успехи матем. наук. – 1959. – XIV(87). – С.21-73.

3. Романко В.А. Смешанные краевые задачи для одной системы уравнений // Докл. АН СССР. – 1986. – 286(1). – С.47-50.

4. Романко В.А. О системах операторных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1987. – 23,9. – С.1574-1585.

5. Вишик М.И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Матем. сб. – 1951. – 29(71). – С.615-676.

6. Солдатов А.П. О первой и второй краевой задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифференц. уравнения. – 2003. – 39,5. – С.674-686.(2003).

7. Корниенко Д.В. Об одной спектральной задаче для двух гиперболических систем уравнений // Дифференц. уравнения. – 2006. – 42,1. – С.91-100.

8. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы т.1 / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. – М.: Иностр. лит., 1962. – Т.1.

ABOUT THE SPECTRUM OF THE DIRICHLET PROBLEM OF TWO ELLIPTIC SYSTEMS

O.V. Alexeeva

Bunin Yelets state university,
Kommunarov St., 28, Yelets, 399770, Russia, e-mail: o.v.alexeeva@gmail.com

Abstract. It is studied spectra of closed differential operators generated by the Dirichlet problem of elliptic systems of the first- and second type. In the case of the first type elliptic system, the spectrum is located in the left half-plane ($\mathrm{Re}\, z \leqslant 0$), and in the case of the second type elliptic system, it is located on the real line ($\mathrm{Im}\ z = 0$) of the complex plane $\mathbb{C}$. The spectrum is discrete.

Key words: spectrum, closed differential operator, elliptic systems, tensor product of Hilbert spaces, basis.

УДК 517.987

СВОЙСТВО МОНОТОННОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРКОЛЯЦИИ БЕРНУЛЛИЕВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НА БЕСКОНЕЧНЫХ ГРАФАХ

Е.С. Антонова, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: antonova_e_s@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается "задача узлов"дискретной теории перколяции на бесконечных графах $\Lambda(V,\Phi)$ произвольного вида. Изучается вероятность перколяции $\mathsf{Q}_n[\mathsf{c};x]$, характеризующая свойство просачивания неоднородного бернуллиевского случайного поля из любой его фиксированной вершины x на конечное расстояние $n \in \mathbb{N}$. Доказано свойство монотонной зависимости функционала $\mathsf{Q}_n[\mathsf{c};x]$ по каждой компоненте $c(y)$, $y \in V$ распределения $\mathsf{c} = \{c(z); z \in V\}$ концентраций "недефектных"вершин графа.

Ключевые слова: вероятность перколяции, бесконечные графы, бернуллиевское случайное поле.

1. Введение. Появление термина "перколяция"и начало теории перколяции было положено в работе [1] при математическом моделировании явлений типа *просачивания*, происходящих в случайно-неоднородных средах. Изучение такого рода моделей показало, что задачи о просачивании можно ставить для случайных множеств в пространствах с довольно произвольным отношением *связности* между его элементами. В соответствии с этим математическая теория перколяции разделилась на два существенно отличающихся друг от друга направления, называемые, соответственно, дискретной и непрерывной теориями перколяции. Первое из них, в рамках которого получено множество глубоких результатов качественного характера, (см. обзоры и монографии [2], [5]-[8]) изучает свойства просачивания случайных подмножеств бесконечных связных графов [4], в частности, так называемых периодических графов [7]. Надо заметить, что вплоть до настоящего времени, в этой теории отсутствует регулярный метод вычисления с любой наперёд заданной точностью основной величины – вероятности перколяции $\mathsf{Q}[\mathsf{c}]$ для какого-либо широкого класса бесконечных графов, которая является функцией набора $\mathsf{c} = \langle c_1, ..., c_m \rangle$ параметризующего распределение вероятностей случайных множеств. Функция $\mathsf{Q}[\mathsf{c}]$ вычисляется посредством довольно громоздких компьютерных технологий и при этом процедура вычисления не имеет внешнего априорного контроля точности. В создавшейся ситуации основной математический интерес представляют качественные свойства этой функции. В настоящей работе изучается одно из таких качественных свойств, которое, как можно ожидать, должно иметь общий характер. А именно, устанавливается свойство монотонной зависимости вероятности перколяции бернуллиевского случайного поля от вероятностей заполнения вершин графа. Это свойство проявляется в простых точно решаемых моделях [9] и оно обусловлено довольно очевидной физической причиной. Однако математическое доказательство наличия этого свойства у какого-либо широкого класса моделей теории перколяции в литературе отсутствует.

2. Задача дискретной теории перколяции. Пусть $\Lambda(V,\Phi)$ – бесконечный граф. Его рёбра, в общем случае, могут быть направленными, однако мы будем предполагать, что граф не имеет петель и кратных рёбер. Граф Λ образуется множеством вершин V и множеством рёбер Φ. Индекс каждой вершины графа, равный числу рёбер инцидентных этой вершине, предполагается конечным. Далее, говоря о "любом графе"мы имеем в виду только графы указанного типа. Заметим, что ограничение графами, не содержащими петель и кратных рёбер, несущественно с точки зрения задач теории перколяции. Однако, мы рассматриваем только графы указанного типа, во-первых, ввиду важности их с точки зрения приложений и, во-вторых, ввиду упрощения даваемых ниже определений и конструкций.

Отношение смежности пары вершин x и y из V – множества вершин графа будем обозначать $x\varphi y$, $\varphi \in \Phi$. Всякую последовательность $\gamma = \langle x_0, x_1, ..., x_n \rangle$ вершин графа Λ таких, что $x_{j-1}\varphi x_j$, $j = 1 \div n$ будем называть путём длины n. Длину пути γ будем обозначать следующим образом: $|\gamma| = n$. Если путь γ имеет начальную точку $x \equiv x_0$ и конечную точку $y \equiv x_n$, то мы будем говорить, что он соединяет вершины x и y и записывать это отношение в виде $\gamma(x, y)$. Причём, в общем случае, при наличии отношения направленности у некоторых из рёбер графа, порядок вершин x и y в этом отношении существен.

Расстоянием $\mathrm{dist}(x, y)$ между двумя вершинами x и y на V будем называть минимум множества значений длины каждого из путей, у которых x и y являются концевыми точками,

$$\mathrm{dist}(x, y) = \min\{|\gamma|; \gamma(x, y)\}\,.$$

Путь $\gamma = \langle x_0, x_1, ..., x_n \rangle$ будем называть несамопересекающимися, если $x_j \neq x_k$ при $j \neq k$, $j, k = 0 \div n$.

Пусть на графе $\Lambda(V, \Phi)$ задано дихотомическое случайное поле $\{\tilde{c}(x); x \in V\}$ со значениями $\{0, 1\}$. Это поле, естественным образом, индуцирует случайные множества с реализациями $\tilde{C}$[1], определяемые формулой $\tilde{C} = \{z \in V : \tilde{c}(z) = 1\}$. Эти случайные реализации далее будем называть конфигурациями. По определению, конфигурация $\tilde{C}$ обладает перколяцией (на бесконечность), если существует содержащийся в ней бесконечный несамопересекающийся путь $\gamma \subset \tilde{C}$. Если такой путь, обозначаемый посредством $\gamma(x)$, проходит через вершину $x \in V$, то говорят, что существует перколяция из вершины x. Не ограничивая общности, можно считать, что путь γ полуограниченный и начинается в вершине x.

С точки зрения постановки задач теории перколяции, важно также понятие просачивания из фиксированной вершины x в любую другую вершину y. Мы будем говорить, что в случайной реализации $\tilde{C}$ имеется перколяция (просачивание) из x в y, если существует путь $\gamma \subset \tilde{C}$ такой, что $\gamma(x, y)$. Вероятность $\mathsf{Q}[x, y|\mathsf{c}]$ перколяции из вершины x в вершину y определяется как

$$\mathsf{Q}[x, y|\mathsf{c}] = \Pr\{\exists(\gamma \subset \tilde{C} : \gamma(x, y)\}\,.$$

Объектом изучения в дискретной теории перколяции является также более общая функция – вероятность $\mathsf{Q}[x_1, ..., x_n|\mathsf{c}]$ связности на конфигурации $\tilde{C}$ произвольного набора вершин $\{x_1, ..., x_n\}$, то есть взаимного просачивания из одной вершины набора в любую другую вершину этого набора. эта вероятность даётся формулой

$$\mathsf{Q}[x_1, ..., x_n|\mathsf{c}] = \Pr\left\{\exists(\langle \gamma_i \subset \tilde{C}; i = 2 \div n\rangle : \gamma_j(x_1, x_j), j = 2 \div n)\right\}\,.$$

[1]В дальнейшем все случайные математические объекты отмечаются знаком "тильда".

В настоящей работе мы изучаем вероятность $\mathsf{Q}_n[x|\mathsf{c}]$ просачивания (ухода) из вершины x на произвольное расстояние $n \in \mathbb{N}$, которая определяется следующим образом.

Обозначим $\mathfrak{P}_n(x)$ – класс конечных несамопересекающихся путей $\gamma(x)$ с длиной, не меньшей чем n, которые начинаются в вершине x. Тогда, согласно определению,

$$\mathsf{Q}_n[x|\mathsf{c}] = \Pr\{\mathfrak{A}_n(x)\}\,,$$

$$\mathfrak{A}_n(x) = \{\tilde{C} \in \Omega : \exists(\gamma \subset \tilde{C} : \gamma \in \mathfrak{P}_n(x))\}\,, \tag{1}$$

где $\Omega = \{\tilde{C} : \tilde{C} = \{z \in V : \tilde{c}(z) = 1\}\}$ – пространство элементарных событий, состоящее из всевозможных конфигураций на V.

Наконец, дадим определение вероятности $\mathsf{Q}[x|\mathsf{c}]$ перколяции из вершины $x \in V$ графа Λ на бесконечность. Заметим, что в общем случае, для графов произвольного вида и для произвольных дихотомических случайных полей, эта вероятность не обязана совпадать с пределом $\lim\limits_{|y|\to\infty} \mathsf{Q}[x,y|\mathsf{c}]$ вероятности перколяции в вершину y при неограниченном возрастании расстояния $\mathrm{dist}(x,y)$. Очень важной проблемой дискретной теории перколяции является описание тех графов и случайных полей, для которых такое предельное соотношение, на самом деле, имеет место.

Пусть $\mathfrak{P}_\infty(x)$ – класс бесконечных несамопересекающихся путей $\gamma(x)$, которые начинаются в вершине x. Тогда вероятность $\mathsf{Q}[x|\mathsf{c}]$ перколяции из вершины x определяется формулой

$$\mathsf{Q}[x|\mathsf{c}] = \Pr\{\exists(\gamma(x) \in \mathfrak{P}_\infty(x) : \gamma(x) \subset \tilde{C})\}\,. \tag{2}$$

Она позволяет сформулировать простое утверждение –

Теорема 1. *Справедливо предельное соотношение*

$$\mathsf{Q}[x|\mathsf{c}] = \lim_{n\to\infty} \mathsf{Q}_n[x|\mathsf{c}]\,. \tag{3}$$

□ Из формулы (1) следует, что

$$\{\exists(\gamma(x) \in \mathfrak{P}_\infty(x) : \gamma(x) \subset \tilde{C})\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n(x)\,, \tag{4}$$

где $\mathfrak{A}_1(x) \supset \mathfrak{A}_2(x) \supset ... \supset \mathfrak{A}_n(x) \supset ....$ Тогда, согласно (2) и (4), имеем

$$\mathsf{Q}[x|\mathsf{c}] = \Pr\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n(x)\right\} = \lim_{n\to\infty} \Pr\{\mathfrak{A}_n(x)\} \equiv \lim_{n\to\infty} \mathsf{Q}_n[x|\mathsf{c}]\,,$$

где мы воспользовались непрерывностью меры. ■

3. Перколяционное разложение. Для доказательства основной теоремы настоящей работы нам понадобится некоторое предварительное построение, результатом которого является формула, которую мы называем *перколяционным разложением.*

Введём в рассмотрение классы $\mathfrak{W}_n$ связных конечных подмножеств из V, содержащих вершину x и таких, что расстояние от любой вершины каждого из множеств, входящих в $\mathfrak{W}_n$, до вершины x не превосходит n, $n \in \mathbb{N}_+$.

Конструируемое ниже перколяционное разложение случайного события $\mathfrak{Q}_n \equiv \{\tilde{C} : \exists(\gamma \subset \tilde{C} : \gamma \in \mathfrak{P}_n(x))\}$ представляет собой дизъюнктивное разложение на попарно непересекающиеся случайные события, совокупность которых для каждого значения $n \in \mathbb{N}$ параметризуется классом Ω_n последовательностей $\mathfrak{A}_n \equiv \langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n \rangle$ длины n, $n \in \mathbb{N}$, которые мы называем *допустимыми.* Компонентами этих последовательностей являются множества $\Sigma_k \in \mathfrak{W}_k$, $k = 1 \div n$.

Допустимые последовательности $\mathfrak{A}_n$, по определению, являются расширяющимися, то есть для каждого значения $k = 1, ..., n-1$ имеет место строгое включение $\Sigma_{k+1} \supset \Sigma_k$ и при этом, если последовательность $\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n, \Sigma_{n+1} \rangle$ принадлежит классу Ω_{n+1}, то её ограничение $\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n \rangle$ принадлежит классу Ω_n. Последнее свойство позволяет описать классы Ω_n, $n \in \mathbb{N}$ допустимых последовательностей $\mathfrak{A}_n$ индуктивно по величине $n \in \mathbb{N}$ посредством определения класса Ω_1 и указания при каждом фиксированном значении $n \in \mathbb{N}$ для каждой последовательности $\mathfrak{A} = \langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n \rangle \in \Omega_n$ класса всех возможных непустых расширений Δ_{n+1} её последней компоненты Σ_n, $\Delta_{n+1} \cap \Sigma_n = \varnothing$, при которых получаются последовательности $\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n, \Sigma_{n+1} \rangle$, $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \Delta_{n+1}$ класса Ω_{n+1}.

Обозначим $D_0 = \Sigma_0 = \{x\}$. При $n = 1$ определим класс Ω_1 допустимых последовательностей $\langle \Sigma_1 \rangle$ длины 1, у которых множество возможных значений Σ_1 определяется как $\{\Sigma_1 = \{x\} \cup \Delta_1 : \varnothing \neq \Delta_1 \subset D_1\}$, где $D_1 = \{z \in V : z\varphi x\}$. Зафиксируем значение $n > 1$ и выберем для него произвольную последовательность $\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n \rangle \in \Omega_n$. Укажем для этой последовательности класс возможных расширений Δ_{n+1}, приводящих к построению всех последовательностей из Ω_{n+1}, у которых начальным отрезком длины n является $\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n \rangle$. Для этого определим множества $D_k = \{z : \exists(y \in \Sigma_{k-1} : z\varphi y), z \notin \Sigma_{k-1}\}$, $k = 1 \div (n+1)$. Класс всех расширений компоненты Σ_n до какой-либо компоненты Σ_{n+1} допустимой последовательности $\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_{n+1} \rangle$ длины $(n+1)$ состоит из непустых подмножеств $\Delta_{n+1} \subset D_{n+1} \setminus (D_0 \cup D_1 \cup ... \cup D_n) \equiv D^*_{n+1}$, если последнее множество не пусто. При этом очевидно, что $\Delta_{n+1} \cap \Sigma_n = \varnothing$. Если же $D^*_{n+1} = \varnothing$, то будем считать, что для допустимой последовательности $\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n \rangle$ не имеется допустимого расширения.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и каждой допустимой последовательности $\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n \rangle \in \Omega_n$ определим множество конфигураций

$$A_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) = \{\tilde{C} : \Sigma_n \subset \tilde{C},\, \tilde{C} \cap (D^*_k \setminus \Sigma_k) = \varnothing, k = 1 \div n\}\,.$$

Сформулируем следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любого* $n \in \mathbb{N}$ *имеет место дизъюнктивное разложение*

$$\mathfrak{Q}_n = \{\tilde{C} : \exists(\gamma \subset \tilde{C} : \gamma \in \mathfrak{P}_n(x))\} = \bigcup_{\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n \rangle \in \Omega_n} A_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) \tag{5}$$

такое, что справедлива формула

$$\mathsf{Q}_n[x|\mathsf{c}] = \sum_{\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n \rangle \in \Omega_n} \Pr\{\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n \rangle\} = 1\,. \tag{6}$$

□ Доказательство разбивается на отдельные пункты I - IV.

I. Определим для каждого $k \in \mathbb{N}$ отображение Γ_k. Оно сопоставляет каждой конфигурации $\tilde{C}$ на Λ, в которую может быть уложен, по крайней мере, один несамопересекающийся путь длины k, начинающийся в вершине x, однозначно определяемое непустое множество $\Gamma_k(\tilde{C}) \subset \mathfrak{W}_k$. Это множество состоит из тех и только тех вершин, которые достигаются несамопересекающимися путями $\gamma(x) \subset \tilde{C}$ длины не более, чем k. Оно определяется формулой

$$\Gamma_k(\tilde{C}) = \{z \in V : \exists(\gamma \subset \tilde{C} : z \in \gamma, |\gamma| \leqslant k)\}. \tag{7}$$

Пусть $\tilde{C} \in \mathfrak{Q}_n$. Тогда, согласно данному определению $\Gamma_n(\tilde{C}) \neq \varnothing$. Кроме того, выбрав для этой конфигурации лежащий в ней путь γ длины n рассмотрим все его ограничения длины $k = 1 \div (n-1)$. Они также полностью находятся в $\tilde{C}$. Поэтому, для любого из указанных значений k, имеем $\Gamma_k(\tilde{C}) \neq \varnothing$.

Для каждого $k = 1 \div (n-1)$, согласно формуле (7), имеет место включение $\Gamma_k(\tilde{C}) \subset \Gamma_{k+1}(\tilde{C})$, так как каждый из путей γ, определяющих те вершины в конфигурации $\tilde{C}$, которые должны попасть в $\Gamma_k(\tilde{C})$, является ограничением пути, определяющим вершины из $\tilde{C}$, которые должны попасть в $\Gamma_{k+1}(\tilde{C})$. Ввиду указанного включения последовательность $\langle \Gamma_k(\tilde{C}); k = 1 \div n\rangle$ расширяющаяся. Докажем, что она допустимая. С этой целью введём множества $D'_k = \{z : \exists(y \in \Gamma_{k-1}(\tilde{C}) : z\varphi y), z \notin \Gamma_{k-1}(\tilde{C})\}$. Рассмотрим множество $\Gamma_{k+1}(\tilde{C}) \setminus \Gamma_k(\tilde{C})$.

Пусть $z \in \Gamma_{k+1}(\tilde{C}) \setminus \Gamma_k(\tilde{C})$. Тогда $z \in \tilde{C}$ и существует путь $\gamma(x) \subset \tilde{C}$ (далее, в этом доказательстве все пути несамопересекающиеся) длины $(k+1)$, у которого z является последней вершиной. Если бы этот путь имел меньшую длину, то он был бы полностью расположен в $\Gamma_k(\tilde{C})$, что противоречит выбору вершину z. По этой же причине вершина z не должна содержаться ни в одном из путей с длиной, меньшей чем $(k+1)$ и, в частности, не может быть последней вершиной таких путей. В противном случае, ввиду того, что $z \in \tilde{C}$, эта вершина опять-таки должна была бы находиться в $\Gamma_k(\tilde{C})$.

Рассмотрим предпоследнюю вершину пути $\gamma(x)$. Обозначим её посредством y. Эта вершина является последней у пути $\gamma'(x)$, который получается выбрасыванием вершины z из пути $\gamma(x)$. Так как путь $\gamma'(x)$ имеет длину k и содержится в $\tilde{C}$, то согласно определению множества $\Gamma_k(\tilde{C})$, вершина y должна содержаться в этом множестве. Таким образом, имеют место отношения $y\varphi z$, $z \notin \Gamma_k(\tilde{C})$ и $y \in \Gamma_k(\tilde{C})$. Это означает, что $z \in D'_{k+1}$.

Из определения множеств D'_j, $j = 1 \div k$ следует, что каждая вершина y, принадлежащая при каком-либо $j = 1 \div k$ одновременно D'_j и $\tilde{C}$, обязательно принадлежит $\Gamma_j(\tilde{C})$, так как для неё существует вершина y' в $\Gamma_{j-1}(\tilde{C})$ такая, что $y'\varphi y$, и следовательно, путь $\gamma''(x)$, заканчивающийся в y', может быть продолжен добавлением ребра $\langle y', y\rangle$, оставаясь в конфигурации $\tilde{C}$. Таким образом, $z \notin D'_j$, $j = 1 \div k$, так как, в противном случае, $z \notin \Gamma_{k+1}(\tilde{C}) \setminus \Gamma_k(\tilde{C})$. Следовательно, $z \in D'_{k+1} \setminus (\bigcup\limits_{j=0}^{k} D'_j)$. Так как это равенство имеет место при любом $k = 1 \div n$, то это завершает доказательство допустимости последовательности $\langle \Gamma_k(\tilde{C}); k = 1 \div n\rangle$.

II. Для произвольной конфигурации $\tilde{C}$ из $\mathfrak{Q}_n$ положим $\Sigma_k = \Gamma_k(\tilde{C})$, $k = 1 \div n$. Тогда, ввиду доказанной в п.I допустимости последовательности $\langle \Gamma_k(\tilde{C}); k = 1 \div n\rangle$, рассматриваемая конфигурация содержится в $A_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$. Следовательно, имеет место включение

$$\mathfrak{Q}_n \subset \bigcup_{\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n\rangle \in \Omega_n} A_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n). \tag{8}$$

С другой стороны, рассмотрим произвольную конфигурацию $\tilde{C}$ из множества $A_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$, соответствующего некоторой допустимой последовательности $\langle \Sigma_k; k = 1 \div n \rangle$. Построим, рассуждая посредством спуска по $k = 1 \div n$, несамопересекающийся путь $\langle x, x_1, ..., x_n \rangle \subset \tilde{C}$. Выберем произвольную вершину x_n в непустом, ввиду допустимости последовательности $\langle \Sigma_k; k = 1 \div n \rangle$ множестве $\Sigma_n \setminus \Sigma_{n-1}$. Пусть уже построен на основе выбранной вершины заканчивающийся в ней путь $\langle x_{k+1}, ..., x_n \rangle$, у которого $x_j \in \Sigma_j \setminus \Sigma_{j-1}$, $j = (k+1) \div n$. Множество $\Sigma_k \setminus \Sigma_{k-1}$ не пусто, ввиду допустимости последовательности $\langle \Sigma_k; k = 1 \div n \rangle$. По этой же причине в этом множестве найдётся вершина y, для которой имеет место $y \varphi x_{k+1}$. Так как $\Sigma_{j+1} \setminus \Sigma_j \subset D_{j+1} \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{j} D_i \right)$, $j = k, ..., n-1$, то $\Sigma_k \cap (\Sigma_{j+1} \setminus \Sigma_j) = \varnothing$, $j = k, ..., n-1$. Поэтому y не совпадает ни с одной из вершин x_j, $j = k+1, ..., n$. Положив $x_k = y$, мы завершаем построение очередного шага спуска. Таким образом, мы построим шаг за шагом несамопересекающийся путь $\langle x_1, ..., x_n \rangle$, у которого $x_k \in D_k \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{k-1} D_j \right)$, $k = 1 \div n$. При этом, $x_1 \in D_1$. Поэтому $x \varphi x_1$. Это позволяет завершить построение искомого пути.

Наличие пути $\langle x, x_1, ..., x_n \rangle$ в конфигурации $\tilde{C}$ указывает на то, что $\tilde{C} \in \mathfrak{Q}_n$. Ввиду произвольности конфигурации $\tilde{C}$ в приведенном выше рассуждении имеет место включение

$$\mathfrak{Q}_n \supset A_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) .$$

Ввиду же произвольности допустимой последовательности $\langle \Sigma_k; k = 1 \div n \rangle \in \Omega_n$ получаем, что справедливо включение

$$\mathfrak{Q}_n \supset \bigcup_{\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n \rangle \in \Omega_n} A_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) . \qquad (9)$$

Наличие включений (8) и (9) позволяет утверждать, что

$$\mathfrak{Q}_n = \bigcup_{\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n \rangle \in \Omega_n} A_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) . \qquad (10)$$

III. Докажем, что разложение (10) дизъюнктивно. Рассмотрим два множества $A_n(\Sigma'_1, ..., \Sigma'_n)$ и $A_n(\Sigma''_1, ..., \Sigma''_n)$, соответствующие двум различным допустимым наборам $\langle \Sigma'_1, ..., \Sigma'_n \rangle$ и $\langle \Sigma''_1, ..., \Sigma''_n \rangle$. Пусть номер k, $1 \leqslant k \leqslant n$ – наименьший, при котором $\Sigma'_k \neq \Sigma''_k$. Ввиду минимальности номера k, множества Σ'_k и Σ''_k имеют одно и то же множество D_k. Кроме того, все множества D_j, $j = 1 \div (k-1)$ являются общими для обоих последовательностей множеств $\langle \Sigma'_k, ..., \Sigma'_n \langle$ и $\langle \Sigma''_1, ..., \Sigma''_n \rangle$. Так как $\Sigma'_k \neq \Sigma''_k$, то симметрическая разность $(\Sigma'_k \setminus \Sigma''_k) \cup (\Sigma''_k \setminus \Sigma'_k)$ не пуста. Следовательно, найдётся, по крайней мере, одна отличающая множества Σ'_k, Σ''_k вершина. Положим, для определённости, что таковой является вершина $z \in \Sigma''_k \setminus \Sigma'_k$. Тогда, согласно определению допустимой последовательности $\langle \Sigma''_1, ..., \Sigma''_n \rangle$, вершина $z \in \tilde{C}$ для любой конфигурации $\tilde{C}$, общей для множеств $A_n(\Sigma'_1, ..., \Sigma'_n)$, $A_n(\Sigma''_1, ..., \Sigma''_n)$. С другой стороны, согласно допустимости последовательности $\langle \Sigma'_1, ..., \Sigma'_n \rangle$, $z \notin \tilde{C}$ для этой же конфигурации, так как $\Sigma''_k \setminus \Sigma'_k \subset D^*_k \setminus \Sigma'_k$ и поэтому $(D^*_k \setminus \Sigma'_k) \cap \tilde{C} = \varnothing$. Полученное противоречие доказывает пустоту пересечения $A_n(\Sigma'_1, ..., \Sigma'_n) \cap A_n(\Sigma''_1, ..., \Sigma''_n)$. Таким образом, согласно п.II и из доказанной дизъюнктивности совокупности множеств $A_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$, перечисляемой всеми возможными последовательностями $\mathfrak{A}_n \in \Omega_n$, имеет место дизъюнктивное разложение (5).

IV. Для любого пути $\gamma = \langle x, x_1, ..., x_n \rangle$, множество

$$\{\gamma \subset \tilde{C}\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{x_i \in \tilde{C}\}$$

измеримо. При любом фиксированном $k = 1 \div n$ для любого фиксированного множества $\Sigma_k \in \mathfrak{W}_k$ измеримо также множество

$$\bigcap_{\substack{\gamma:|\gamma|\leqslant n,\\ \gamma\subset\Sigma_k}} \{\gamma \subset \tilde{C}\} = \{\Gamma_k(\tilde{C}) = \Sigma_k\}\,,$$

так как совокупность всех путей γ, которые определяют множества в пересечении, конечна. Следовательно, измеримо множество

$$A_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) = \bigcap_{k=1}^{n} \{\Gamma_k(\tilde{C}) = \Sigma_k\}$$

при любом наборе $\mathfrak{A}_n$, то есть оно является случайным событием и поэтому имеет определённую вероятность $\Pr\{A_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)\} \equiv \mathsf{P}_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$.

Так как для каждого значения $k \in \mathbb{N}$ класс $\mathfrak{W}_k$ конечен, то каждое из множеств $\Omega_k \subset \mathfrak{W}_1 \times ... \times \mathfrak{W}_k$ представляет собой не более чем конечную совокупность элементов. По этой причине, разложение (5) состоит из конечной совокупности компонент. Тогда следствием дизъюнктивности разложения (5) является формула (6). ■

Формулу (6) мы называем перколяционным разложением. Оно имеет место для любого дихотомического случайного поля. Его важность связана с тем, что возможно аналитическое описание связи вероятностей $\mathsf{P}_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$ с распределением вероятностей поля. В следующем пункте мы выявим эту связь в том случае, когда поле $\{\tilde{c}(z); z \in V\}$ является бернуллиевским.

4. Случай бернуллиевского поля. Пусть на графе $\Lambda(V, \Phi)$ задано неоднородное бернуллиевское случайное поле $\{\tilde{c}(z); z \in V\}$, то есть множество случайных величин $\tilde{c}(z)$, отмеченных вершинами $z \in V$, которые являются независимыми в совокупности, и их распределение вероятностей даётся равенствами $\Pr\{\tilde{c}(z) = 1\} = c(z)$, $z \in V$, где $\mathsf{c} : V \mapsto [0, 1]$ – вероятности заполнения вершин $x \in V$.

Свяжем теперь вероятности $\mathsf{P}_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$ с распределением вероятностей бернуллиевского поля $\{\tilde{c}(z); z \in V\}$. С этой целью введём для каждого $n \in \mathbb{N}$ функции

$$\mathsf{Q}_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) = \left(\prod_{z\in\Delta_n} c(z)\right)\left(\prod_{z\in D_n^*\setminus\Delta_n} (1 - c(z))\right)\,, \tag{11}$$

зависящие от допустимых наборов $\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n \rangle$. Их значения зависят также функционально, как от параметров, от всех концентраций, определяющих бернуллиевское случайное поле. Здесь $D_n^* = D_n \setminus (\bigcup_{k=0}^{n-1} D_k)$, $n \in \mathbb{N}$. Имеет место

Теорема 3. *Для вероятности* $\mathsf{P}_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$ *справедливо рекуррентное соотношение*

$$\mathsf{P}_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_{n-1}, \Sigma_n) = \mathsf{P}_{n-1}(\Sigma_1, ..., \Sigma_{n-1})\mathsf{Q}_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_{n-1}, \Sigma_n)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{12}$$

□ Зафиксировав допустимую последовательность $\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n, \Sigma_{n+1}\rangle$, запишем случайное событие $A_{n+1}(\Sigma_1, ..., \Sigma_n, \Sigma_{n+1})$ в следующей форме

$$A_{n+1}(\Sigma_1, ..., \Sigma_n, \Sigma_{n+1}) \equiv \{\Sigma_{n+1} \subset \tilde{C}, (D^*_k \setminus \Sigma_k) \cap \tilde{C} = \varnothing, k = 1 \div (n+1)\} =$$

$$= \{(D^*_{n+1} \setminus \Sigma_{n+1}) \cap \tilde{C} = \varnothing, (\Sigma_{n+1} \setminus \Sigma_n) \subset \tilde{C};$$

$$\Sigma_n \subset \tilde{C}, (D^*_k \setminus \Sigma_k) \cap \tilde{C} = \varnothing, k = 1 \div n\} =$$

$$= \{(D^*_{n+1} \setminus \Sigma_{n+1}) \cap \tilde{C} = \varnothing, (\Sigma_{n+1} \setminus \Sigma_n) \subset \tilde{C}\} \cap$$

$$\cap \{\Sigma_n \subset \tilde{C}, (D^*_k \setminus \Sigma_k) \cap \tilde{C} = \varnothing, k = 1 \div n\}\,,$$

где учтено, что последовательность $\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n\rangle$, являющаяся ограничением допустимой последовательности, также допустимая. Так как $D^*_{n+1} \cap \Sigma_n = \varnothing$ и случайное поле бернуллиевское, события $\{(D^*_{n+1} \setminus \Sigma_{n+1}) \cap \tilde{C} = \varnothing, \Sigma_{n+1} \setminus \Sigma_n \subset \tilde{C}\}$ и $\{\Sigma_n \subset \tilde{C}, (D^*_k \setminus \Sigma_k) \cap \tilde{C} = \varnothing, k = 1 \div n\}$ независимы. Тогда

$$\Pr\{A_{n+1}(\Sigma_1, ..., \Sigma_n, \Sigma_{n+1})\} = \mathsf{P}_{n+1}(\Sigma_1, ..., \Sigma_n, \Sigma_{n+1}) =$$

$$= \Pr\{(D^*_{n+1} \setminus \Sigma_{n+1}) \cap \tilde{C} = \varnothing, \Sigma_{n+1} \setminus \Sigma_n \subset \tilde{C}\} \times$$

$$\times \Pr\{\Sigma_n \subset \tilde{C}, (D^*_k \setminus \Sigma_k) \cap \tilde{C} = \varnothing, k = 1 \div n\}\,.$$

Первый сомножитель в правой части равенства, учитывая независимость значений поля в каждой из вершин $z \in D^*_{n+1}$ равен

$$\Pr\{(D^*_{n+1} \setminus \Sigma_{n+1}) \cap \tilde{C} = \varnothing, \Sigma_{n+1} \setminus \Sigma_n \subset \tilde{C}\} =$$

$$= \left(\prod_{z \in \Delta_n} c(z)\right)\left(\prod_{z \in D^*_n \setminus \Delta_n} (1 - c(z))\right)\,,$$

где $\Delta_{n+1} = \Sigma_{n+1} \setminus \Sigma_n$, а второй по определению является вероятностью $\mathsf{P}_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_{n-1}, \Sigma_n)$. Откуда получаем формулу (12). ■

Следствие. *Вероятность* $\mathsf{Q}_n[x|\mathsf{c}]$ *представляется формулой*

$$\mathsf{Q}_n[x|\mathsf{c}] = c(x) \sum_{\langle \Sigma_1, ..., \Sigma_n\rangle \in \Omega_n} \prod_{k=1}^{n} \mathsf{Q}_k(\Sigma_1, ..., \Sigma_k)\,. \tag{13}$$

□ Доказательство проводится индукцией по $n \in \mathbb{N}$ на основе рекуррентной формулы (12) и значения вероятности $\mathsf{P}_0(\Sigma_0) = \Pr\{\tilde{c}(x) = 1\} = c(x)$. ■

5. Основная теорема. Теперь мы в состоянии сформулировать и доказать основную теорему.

Теорема 4. *Для любого графа* $\Lambda(V, \Phi)$ *и любой вершины* $x \in V$ *вероятность* $\mathsf{Q}_n[x|\mathsf{c}]$ *перколяции из вершины* x *на расстояние* n *бернуллиевского случайного поля* $\{\tilde{c}(z); z \in V\}$

с распределением вероятностей $Pr\{\tilde{c}(z) = 1\} = c(z)$, $z \in V$ является строго возрастающей функцией по каждой из концентраций $c(z)$, $z \in V$.

□ Продифференцируем вероятность $\mathsf{P}_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$ по параметру $c(z)$, $z \in V$,

$$\frac{\partial}{\partial c(z)}\mathsf{P}_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial c(z)}\mathsf{Q}_k(\Sigma_1, ..., \Sigma_k)\right)\prod_{j=1:j\neq k}^{n}\mathsf{Q}_j(\Sigma_1, ..., \Sigma_j) +$$

$$+\delta_{x,z}\prod_{j=1}^{n}\mathsf{Q}_j(\Sigma_1, ..., \Sigma_j)\,. \tag{14}$$

Для каждого допустимого набора $\langle\Sigma_1, ..., \Sigma_n\rangle$, каждая из функций $\mathsf{Q}_k(\Sigma_1, ..., \Sigma_k)$ зависит только от тех параметров $c(z)$, для которых $z \in D_k^*$, $k = 0 \div n$. Поэтому, при каждом фиксированном наборе $\langle\Sigma_1, ..., \Sigma_n\rangle$, в сумме (13) только одно слагаемое не равно нулю и согласно (12) можно написать

$$\frac{\partial}{\partial c(z)}\sum_{\langle\Sigma_1,...,\Sigma_n\rangle}\mathsf{P}_n(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) =$$

$$= c(x)\sum_{k=1}^{n}\sum_{\langle\Sigma_1,...,\Sigma_{k-1}\rangle}\left[\frac{\partial}{\partial c(z)}\sum_{\Sigma_k:z\in D_k^*}\mathsf{Q}_k(\Sigma_1, ..., \Sigma_k)\right]\times$$

$$\times\sum_{\langle\Sigma_{k+1},...,\Sigma_n\rangle}\prod_{j=1:j\neq k}^{n}\mathsf{Q}_j(\Sigma_1, ..., \Sigma_j) +$$

$$+\,\delta_{x,z}\sum_{\langle\Sigma_1,...,\Sigma_n\rangle}\prod_{j=1}^{n}\mathsf{Q}_k(\Sigma_1, ..., \Sigma_k)\,.$$

Доказательство завершается установлением положительности суммы, стоящей в квадратной скобке. Так как в этой сумме множества Σ_k таковы, что $\varnothing \neq \Delta_k = \Sigma_k \setminus \Sigma_{k-1} \subset D_k^*$, то, согласно (11), для этой суммы имеем

$$\sum_{\varnothing\neq\Delta_k\subset D_k^*}\frac{\partial}{\partial c(z)}\left(\prod_{y\in\Delta_k}c(y)\right)\left(\prod_{y\in D_k^*\setminus\Delta_k}(1-c(y))\right) =$$

$$= \sum_{\Delta_k\subset D_k^*:z\in\Delta_k}\left(\prod_{y\in\Delta_k\setminus\{z\}}c(y)\right)\left(\prod_{y\in D_k^*\setminus\Delta_k}(1-c(y))\right) -$$

$$-\sum_{\varnothing\neq\Delta_k\subset D_k^*:z\notin\Delta_k}\left(\prod_{y\in\Delta_k}c(y)\right)\left(\prod_{y\in D_k^*\setminus(\Delta_k\cup\{z\})}(1-c(y))\right) =$$

$$= \prod_{y\in D_k^*\setminus\{z\}}(1-c(y)) \geqslant 0\,.$$

Последнее тождество связано с тем, что первая сумма равна тождественно 1, а вторая отличается от 1 на слагаемое с $\Delta_k = \varnothing$. ■

Следствие. *Для любого графа $\Lambda(V, \Phi)$ и любой вершины $x \in V$ вероятность $\mathsf{Q}[x|\mathsf{c}]$ перколяции из вершины x на бесконечность бернуллиевского случайного поля $\{\tilde{c}(z); z \in V\}$ с распределением вероятностей $Pr\{\tilde{c}(z) = 1\} = c(z)$, $z \in V$ является неубывающей функцией по каждой из концентраций $c(z)$, $z \in V$.*

□ Доказательство получается переходом к пределу $n \to \infty$ в каждом из неравенств $Q_n[x|\mathsf{c}]_{c(z)=c_1} < Q_n[x|\mathsf{c}]_{c(z)=c_2}$, $c_1 < c_2$, характеризующих свойство возрастания функции $\mathsf{Q}_n[x|\mathsf{c}]$. ■

6. Заключение. Доказанное в этой работе свойство монотонности довольно естественно с физической точки зрения. В самом деле, совершенно ясно, что повышение концентрации $c(z)$ для любой из вершин $z \in V$, то есть вероятности того, что эта вершина присутствует в конфигурации $\tilde{C}$ недефектных вершин, должно приводить к повышению вероятности существования в $\tilde{C}$ какого-либо пути, соединяющего две наперёд заданные вершины x и y графа, так как повышается вероятность существования такого пути, который бы проходил через вершину z. Тем не менее, математическое доказательство этого простого физического факта до настоящего времени отсутствовало в дискретной теории перколяции. Интересно было бы установить остаётся ли справедливым доказанное утверждение для произвольных моделей теории перколяции при подходящей его формулировке. Если же будет установлено, что это не так, то естественно возникает вопрос: насколько широк класс моделей, для которых утверждение о монотонном возрастании остаётся верным. В частности, по-видимому, указанным свойством монотонности должна обладать вероятность перколяции бернуллиевского поля на произвольном направленном графе и аналогичная величина дихотомического гиббсовского случайного поля ("решёточного газа") с притягивающим взаимодействием (см., например, [3]).

Литература

1. Broadbent S.R., Hammersley J.M. Percolation processes I. Crystals and mazes// Proceedings of the Cambridge Philosiphical Society. – 1957. – 53. – P.629-641.

2. Frisch C.M., Hammersley J.M. Percolation processes and related topics// Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. – 1963. – 11. – P.894-918.

3. Simon B. The $P(\varphi)_2$ euclidian (quantum) field theory.– Princeton: Princeton University Press, 1974. (Саймон Б. Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля.– М.: Мир, 1976.)

4. Mc Diarmid C.J.H. General percolation and random graphs// Advances ib Applied Probability. – 1881. – 13. – P.40-60.

5. Wierman J.C. Percolation Theory// Annals of Probability. – 1982. – 10. – P.509-524.

6. Kesten H. Percolation Theory for Mathematicians/ H.Kesten. – Boston: Birkhauser, 1982.

7. Grimmett G. Percolation. 2nd Edition/ G.Grimmet. – New York: Springer-Verlag, 1999.

8. Тарасевич Ю.Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы/ Ю.Ю.Тарасевич. – М.: Эдиториал УРСС, 2002.

9. Антонова Е.С., Вирченко Ю.П. Просачивание бернуллиевского случайного поля на конечное расстояние // Вестник Херсонск. нац. техн. ун-та. – 2010. – 3(39). – С.30-34.

MONOTONOUS DEPENDENCE OF BERNOULLI RANDOM FIELD PERCOLATION PROBABILITY ON INFINITE GRAPHS

E.S. Antonova Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: antonova_e_s@mail.ru
Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. The cite problem for arbitrary infinite graphs $\Lambda(V, \Phi)$ in discrete percolation theory is considered. The percolation probability $\mathsf{Q}_n[\mathsf{c}; x]$ is studied. It characterizes the property of the nonuniform Bernoulli random field that is the percolation on finite distance $n \in \mathbb{N}$ from the fixed vertex x. It is proved the monotonous dependence $\mathsf{Q}_n[\mathsf{c}; x]$ on each component $c(y)$, $y \in V$ of the concentration distribution $\mathsf{c} = \{c(z); z \in V\}$ of graph vertexes being not defected.

Key words: percolation probability, infinite graph, Bernoulli random field.

УДК 517.956

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ

А.Н. Бабаев, А.В. Глушак

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматривается задача определения правой части уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу по дополнительному наблюдению в некоторой пространственной точке или в некоторый момент времени.

Ключевые слова: уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу, обратная коэффициентная задача, однозначная разрешимость.

Пусть $\Omega = \{t > 0,\ x \in R\}$, функции $u(t,x),\ F(t,x)$ определены и непрерывны в $\bar{\Omega}$. При $k \geq 0$ будем рассматривать следующую задачу

$$u''_{tt} + \frac{k}{t}u'_t = u''_{xx} + F(t,x), \quad (t,x) \in \Omega\,, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x)\,, \quad u'_t(0,x) = 0\,, \tag{2}$$

в которой, помимо $u(t,x)$, неизвестной является и правая часть $F(t,x)$ уравнения (1). Будем считать, что функция $F(t,x)$ представима в виде произведения $F(t,x) = p(t)q(x)$, где один из сомножителей известен, а второй восстанавливается по дополнительному наблюдению в некоторой точке пространства $x_1 \in R$

$$u(t,x_1) = \mu(t), \quad x_1 \in R \tag{3}$$

или по известному решению в некоторый момент времени $t_1 \in (0,\infty)$

$$u(t_1,x) = \nu(x), \quad t_1 \in (0,\infty)\,. \tag{4}$$

Уравнение (1) называется уравнением Эйлера-Пуассона-Дарбу, соотношения (2) – начальными условиями, равенства (3), (4) – дополнительными условиями в точке наблюдения x_1 или t_1. Задачи (1) – (3) и (1), (2), (4), где $u(t,x)$ и $F(t,x)$ – неизвестные функция, называются коэффициентными обратными задачами (или просто обратными задачами). Обзор публикаций по обратным задачам можно найти в [1], [6].

В работе используются следующие обозначения, заимствованные из работы [3],

$$[Y_0(t)f](x) = [C(t)f](x) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)), \quad Y_0(0) = I\,, \tag{5}$$

$$[Y_k(t)f](x) = \frac{2\,\Gamma(k/2+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(k/2)} \int\limits_0^1 \left(1-s^2\right)^{k/2-1}\ [C(ts)f](x)\, ds, \quad Y_k(0) = I\,, \tag{6}$$

Работа поддержана РФФИ (грант 10–01–00062)

$$[Z_1(t)f](x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \left(1-s^2\right)^{-1/2}\ \ln\left(t\left(1-s^2\right)\right)[C(ts)f](x)\ ds\,, \tag{7}$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция, $k>0$, $(t,x)\in\Omega$, $f(x)\in C(R)$.

Если $u_0(x)\in C^2(R)$, $F(t,x)\in C^2(\bar\Omega)$ — известные функции, то единственным решением прямой задачи (1), (2) является функция $u(t,x)$, находящаяся по формуле (см. [3])

$$u(t,x) = [Y_k(t)u_0](x) + (1-k)^{-1}\left(t^{1-k}Y_{2-k}(t)\int\limits_0^t \tau^k Y_k(\tau)F(\tau,x)\ d\tau - \right.$$

$$\left. - Y_k(t)\int\limits_0^t \tau Y_{2-k}(\tau)F(\tau,x)\ d\tau\right), \quad k\neq 1\,, \tag{8}$$

$$u(t,x) = [Y_1(t)u_0](x) + Z_1(t)\int\limits_0^t \tau Y_1(\tau)F(\tau,x)\ d\tau - Y_1(t)\int\limits_0^t \tau Z_1(\tau)F(\tau,x)\ d\tau, \quad k=1\,. \tag{9}$$

1. Восстановление зависимости правой части F от времени t. Рассмотрим далее случай задачи (1) – (3), полагая, что неизвестная функция $F(t,x)$ зависит только от t, то есть, $F(t,x)=p(t)$.

Наложим условие согласования

$$\mu(0) = u_0(x_1), \quad \mu'(0) = 0\,, \tag{10}$$

которое необходимо следует из равенств (2), (3) и докажем теорему существования и единственности решения задачи (1) – (3).

Теорема 1. *Пусть $k\in[0,2]$, $\mu(t)\in C^2[0,+\infty)$, $u_0(x)\in C^2(R)$, выполнено условие согласования* (10) *и при $k>0$ существует конечный предел $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\mu'(t)}{t}$. Тогда решение обратной задачи* (1) – (3) *существует, единственно и находится по формулам*

$$p(t) = \mu''(t) + \frac{k}{t}\mu'(t) - [Y_k(t)u_0''](x_1)\,, \tag{11}$$

$$u(t,x) = [Y_k(t)u_0](x) + (1-k)^{-1}\int\limits_0^t \tau(t^{1-k}\tau^{k-1}-1)p(\tau)\ d\tau, \quad k\in[0,1)\bigcup(1,2]\,, \tag{12}$$

$$u(t,x) = [Y_1(t)u_0](x) + \int\limits_0^t \tau\ln\frac{t}{\tau}\ p(\tau)\ d\tau, \quad k=1\,. \tag{13}$$

□ При доказательстве теоремы будем различать три случая изменения k.

1) Пусть $k \in [0,1)$. Тогда равенство (8) после некоторых упрощений примет вид (12). Подставляя (12) в дополнительное условие (3), получим уравнение для нахождения $p(t)$

$$u(t,x_1) = [Y_k(t)u_0](x_1) + (1-k)^{-1}\int\limits_0^t \tau(t^{1-k}\tau^{k-1}-1)p(\tau)d\tau = \mu(t)\,. \tag{14}$$

После двукратного дифференцирования равенства (14) будем иметь

$$\int\limits_0^t \tau^k p(\tau)\,d\tau = t^k\frac{d}{dt}\left(\mu(t) - [Y_k(t)u_0](x_1)\right)\,,$$

$$p(t) = \mu''(t) + \frac{k}{t}\mu'(t) - \frac{k}{t}\frac{d}{dt}[Y_k(t)u_0](x_1) - \frac{d^2}{dt^2}[Y_k(t)u_0](x_1)\,,$$

откуда и следует (см. [3], лемма 1) равенство (11). По найденной функции $p(t)$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), как уже было сказано, находится единственным образом по формуле (8), которая в рассматриваемом случае $F(t,x) = p(t)$ принимает вид (12).

2) Пусть $k = 1$. Тогда

$$Z_1(t)p(t) = p(t)\left(\frac{\ln t}{\pi}\int\limits_0^1 s^{-1/2}(1-s)^{-1/2}\,ds + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 s^{-1/2}(1-s)^{-1/2}\ln s\,ds\right)$$

и, используя интеграл 4.253.1 из [4]

$$\int\limits_0^1 x^{\mu-1}(1-x^r)^{\nu-1}\ln x\,dx = \frac{1}{r^2}B\left(\frac{\mu}{r},\nu\right)\left(\Psi\left(\frac{\mu}{r}\right) - \Psi\left(\frac{\mu}{r}+\nu\right)\right)\,,$$

где $B(\cdot,\cdot)$ – бета-функция, $\Psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ – пси-функция Эйлера, получим

$$Z_1(t)p(t) = \left(\ln t + \Psi\left(\frac{1}{2}\right) - \Psi(1)\right)p(t)\,. \tag{15}$$

Из (9) и (15) выводим представление (13) и подставляя его в дополнительное условие (3), получим уравнение для нахождения $p(t)$

$$u(t,x_1) = [Y_1(t)u_0](x_1) + \int\limits_0^t \tau\ln\frac{t}{\tau}\,p(\tau)\,d\tau = \mu(t)\,. \tag{16}$$

Дифференцируя (16) по t, имеем

$$\int\limits_0^t \tau p(\tau)\,d\tau = t\frac{d}{dt}\left(\mu(t) - [Y_1(t)u_0](x_1)\right)\,,$$

следовательно,

$$tp(t) = \frac{d}{dt}\left(\mu(t) - [Y_1(t)u_0](x_1)\right) + t\frac{d^2}{dt^2}\left(\mu(t) - [Y_1(t)u_0](x_1)\right),$$

$$p(t) = \mu''(t) + \frac{1}{t}\mu'(t) - \frac{1}{t}\frac{d}{dt}[Y_1(t)u_0](x_1) - \frac{d^2}{dt^2}[Y_1(t)u_0](x_1),$$

и окончательно,

$$p(t) = \mu''(t) + \frac{1}{t}\mu'(t) - [Y_1(t)u_0''](x_1).$$

По найденной функции $p(t)$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), находится единственным образом по формуле (9), которая в рассматриваемом случае $F(t,x) = p(t)$ принимает вид (13).

3) Пусть $k \in (1;2]$. Как и в случае $k \in [0;1)$, имеет место равенство (14), которое мы перепишем в виде

$$(1-k)^{-1}\int\limits_0^t \tau(\tau^{k-1} - t^{k-1})p(\tau)\,d\tau = t^{k-1}\mu(t) - t^{k-1}[Y_k(t)u_0](x_1). \qquad (17)$$

Дважды дифференцируя (17), будем иметь

$$\int\limits_0^t t^{k-2}\tau p(\tau)\,d\tau = (k-1)\left(\mu(t) - [Y_k(t)u_0](x_1)\right) + t\frac{d}{dt}\left(\mu(t) - [Y_k(t)u_0](x_1)\right),$$

$$tp(t) = k\frac{d}{dt}\left(\mu(t) - [Y_k(t)u_0](x_1)\right) + t\frac{d^2}{dt^2}\left(\mu(t) - [Y_k(t)u_0](x_1)\right),$$

после чего дальнейшее доказательство проводится аналогично случаю $k \in [0;1)$. ■

Замечание. Если в задаче (1), (2), (3) правая часть имеет вид $F(t,x) = q(x)p(t)$, где $q(x)$ – известная функция, то вместо уравнений (12), (13) нужно будет записать некоторые уравнения Вольтерра первого рода, которые после наложения условий согласования и дифференцирования превратятся в уравнения Вольтерра второго рода. Обратная задача в этом случае также имеет единственное решение, при этом $p(t)$ может быть найдено методом последовательных приближений.

2. Восстановление зависимости правой части F от пространственной переменной x. Рассмотрим далее случай задачи (1), (2), (4), полагая, что неизвестная функция $F(t,x)$ зависит только от x, то есть, $F(t,x) = q(x)$.

Покажем, что разрешимость обратной задачи (1), (2), (4) будет следовать из разрешимости уравнения

$$\left[(I - Y_k(t_1))\,q\right](x) = [Y_k(t_1)u_0''](x) - \nu(x) \qquad (18)$$

Теорема 2. *Пусть $k \in [0,2]$, $u_0(x),\ \nu(x) \in C^2(R)$. Тогда каждое непрерывное решение $q(x)$ уравнения (18) и функция*

$$u(t,x) = [Y_k(t)u_0](x) +$$

$$+ (1-k)^{-1} \left[\left(t^{1-k} Y_{2-k}(t) \int\limits_0^t \tau^k Y_k(\tau)\, d\tau - Y_k(t) \int\limits_0^t \tau Y_{2-k}(\tau)\, d\tau \right) q \right](x)\,, \tag{19}$$

являются решением задачи (1), (2), (4).

□ Пусть $k \in [0,1) \bigcup (1,2]$. Тогда полученная из (8) и определяемая равенством (19) функция $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (2). Учитывая (4), для нахождения функции $q(x)$ получим уравнение

$$[Y_k(t_1) u_0](x) +$$
$$+ (1-k)^{-1} \left[\left(t_1^{1-k} Y_{2-k}(t_1) \int\limits_0^{t_1} \tau^k Y_k(\tau)\, d\tau - Y_k(t_1) \int\limits_0^{t_1} \tau Y_{2-k}(\tau)\, d\tau \right) q \right](x) = \nu(x)\,,$$

из которого двукратным дифференцированием по x выводим (см. [5]) уравнение (18).

Нетрудно убедиться, что если $q(x)$ – решение уравнения (18), а функция $u(t,x)$ определена равенством (19), то пара $(u(t,x), q(x))$ является решением обратной задачи (1), (2), (4). Если уравнение (18) имеет единственное решение, то и задача (1), (2), (4) также имеет единственное решение.

Аналогично рассматривается случай $k=1$. ■

3. Обратная задача для уравнения вида

$$u''_{tt} + \frac{k}{t} u'_t = u''_{xx} + \frac{m}{x} u'_x + p(t), \quad (t,x) \in \Omega\,, \tag{20}$$

где $0 < m \le k$.

Если $u_0(x) \in C^2(R),\ F(t,x) \in C^2(\bar{\Omega})$ – известные функции, то единственным решением прямой задачи (20), (2) является функция $u(t,x)$, находящаяся по формулам (см. [8]) (8), (9), при этом $Y_k(t)$ и $Y_m(t)$ имеют следующий вид

$$[Y_m(t) f](x) = \frac{\Gamma(m/2+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(m/2)} \int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{t^2+x^2+2tx\ \cos\varphi}\right) \sin^{m-1}\varphi\, d\varphi, \quad Y_m(0) = I\,, \tag{21}$$

для $k > m > 0$

$$[Y_k(t) f](x) = \frac{2}{\mathrm{B}(m/2+1/2, k/2-m/2)} \int\limits_0^1 \left(1-s^2\right)^{k/2-m/2-1} s^m\, [Y_m(ts) f](x)\, ds, \quad Y_k(0) = I\,, \tag{22}$$

для $0 \le l < m$

$$[Y_l(t) f](x) = \frac{1}{(q-1)(q-3)\cdots(l+1)}\, t^{1-l} \left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^n \left(t^{q-1} [Y_q(t) f](x)\right)\,, \tag{23}$$

где n – наименьшее целое, такое что $q = 2n + l \ge m$;

$$[Z_1(t) f](x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 \left(1-s^2\right)^{-1/2} \ln\left(t\left(1-s^2\right)\right) [Y_0(ts) f](x)\, ds\,. \tag{24}$$

Теорема 3. *Пусть* $m \in [0;1], k \in [m, 2-m]$, $\mu(t) \in C^2[0,+\infty)$, $u_0(x) \in C^2(R)$, *выполнено условие согласования (10) и при* $k > 0$ *существует конечный предел* $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mu'(t)}{t}$. *Тогда решение обратной задачи* (20), (2), (3) *существует, единственно и находится по формулам* (11), (12), (13), *где* $[Y_k(t)f](x)$ *определяется формулой* (22).

□ Несложно убедиться в том, что задаваемые равенствами (21)-(24), операторные функции удовлетворяют следующим равенствам

$$Y_m(t)f(t) = f(t), \qquad m > 0\,;$$

$$Y_k(t)f(t) = f(t), \qquad k \geq m\,;$$

$$Y_{2-k}(t)f(t) = f(t), \qquad m \leq k \leq 2-m\,;$$

$$Z_1(t)f(t) = \left(\ln t + \Psi\left(\frac{1}{2}\right) - \Psi(1)\right) f(t)\,,$$

где $\Psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ – пси-функция Эйлера.

С учётом этих равенств, дальнейшее доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1. ■

Обозначим далее

$$g(t) = (k-3)(k-1)\left(\mu''(t) + \frac{k}{t}\mu'(t) - [Y_k(t)u_0''](x_1)\right)\,, \tag{25}$$

и покажем, что решение $p(t)$ обратной задачи (20), (2), (3), в случае $m \in (0;1), k \in (2-m, 2]$, является также непрерывным решением дифференциального уравнения

$$2tp'(t) + (k^2 - 2k + 5)p(t) = g(t)\,. \tag{26}$$

Теорема 4. *Пусть* $m \in (0;1), k \in (2-m, 2]$, $\mu(t) \in C^2[0,+\infty)$, $u_0(x) \in C^2(R)$, *выполнено условие согласования* (10) *и существуют конечные пределы*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\mu'(t)}{t}\,, \quad \lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{t}\,. \tag{27}$$

Тогда решение обратной задачи (20), (2), (3) *существует, единственно и находится по формулам*

$$p(t) = \frac{1}{2}\, t^{-(k^2-2k+5)/2} \int\limits_0^t \tau^{(k-1)^2/2} g(\tau)\, d\tau\,, \tag{28}$$

$$u(t,x) = [Y_k(t)u_0](x_1) + \frac{1}{1-k}\int\limits_0^t \tau\left(t^{1-k}\tau^{k-1} + \frac{k-1}{3-k}\right)p(\tau)\, d\tau\,, \tag{29}$$

где $[Y_k(t)u_0](x_1)$ *определяется равенством* (22).

□ Заметим, что, как и при доказательстве теоремы 3, $Y_m(t)f(t) = f(t)$ и $Y_k(t)f(t) = f(t)$. Однако $2-k < m$, а, значит, $Y_{2-k}(t)f(t)$ вычисляется по формуле (23), а не по формуле (22), как это было в теореме 3.

В этом случае $n = 1, q = 4 - k$ и, используя формулу (23), будем иметь

$$[Y_{2-k}(t)f](x) = \frac{1}{3-k}\, t^{-2+k}\frac{d}{dt}\left(t^{3-k}[Y_{4-k}f](x)\right) = \frac{1}{3-k}\, t^{-2+k}\frac{d}{dt}(t^{3-k}f(t))\,,$$

а из равенства (8) выводим представление (29). Действительно,

$$u(t,x) = [Y_k(t)u_0](x) + \frac{1}{k-1}\left(\frac{t^{-1}}{3-k}\frac{d}{dt}\left(t^{3-k}\int\limits_0^t \tau^k p(\tau)d\tau\right) - \int\limits_0^t \frac{\tau^{-1+k}}{3-k}\frac{d}{d\tau}\left(\tau^{3-k}p(\tau)\right)d\tau\right) =$$

$$= [Y_k(t)u_0](x) + \frac{1}{1-k}\int\limits_0^t \tau\left(t^{1-k}\tau^{k-1} + \frac{k-1}{3-k}\right)p(\tau)\, d\tau\,.$$

Подставив (29) в дополнительное условие (3) после упрощений получим равенство

$$\int\limits_0^t \tau\left(t^{1-k}\tau^{k-1} + \frac{k-1}{3-k}\right)p(\tau)\, d\tau = (1-k)\left(\mu(t) - [Y_k(t)u_0](x_1)\right)\,,$$

которое мы перепишем в виде

$$\int\limits_0^t \tau\left(\tau^{k-1} + \frac{k-1}{3-k}t^{k-1}\right)p(\tau)\, d\tau = (1-k)t^{k-1}\left(\mu(t) - [Y_k(t)u_0](x_1)\right)\,. \tag{30}$$

После дифференцирования равенства (30) по t будем иметь

$$(k-1)^2\int\limits_0^t \tau\; p(\tau)\; d\tau + 2t^2p(t) = (3-k)t^{2-k}\frac{d}{dt}\left((1-k)t^{k-1}\left(\mu(t) - [Y_k(t)u_0](x_1)\right)\right)\,.$$

Еще одно дифференцирование по t приводит нас к сотношению

$$((k-1)^2+4)tp(t) + 2t^2p'(t) = \frac{d}{dt}\left((3-k)t^{2-k}\frac{d}{dt}\left[(1-k)t^{k-1}\left(\mu(t) - [Y_k(t)u_0](x_1)\right)\right]\right)\,,$$

из которого следует, что неизвестная функция $p(t)$ удовлетворяет линейному неоднородному дифференциальному уравнению первого порядка (26).

Решая его методом вариации произвольной постоянной, получим

$$p(t) = c\; t^{-(k^2-2k+5)/2} + \frac{1}{2}\, t^{-(k^2-2k+5)/2}\int\limits_0^t \tau^{(k-1)^2/2}g(\tau)\; d\tau\,,$$

с произвольной постоянной c. Так как мы ищем непрерывную функцию $p(t)$, то $c = 0$ и $p(t)$ принимает вид (25). Укажем, что непрерывность $p(t)$ следует из условия (27), в чем можно убедиться с помощью правила Лопиталя.

Для завершения доказательства следует определить функцию $u(t,x)$ по формуле (29). Она определяется единственным образом и теорема тем самым доказана. ■

Литература

1. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics / A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin. – New York: Marcel Dekker,2000.

2. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: URSS, 2007.

3. Глушак А.В., Кононенко В.И., Шмулевич С.Д. Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши // Известия ВУЗов. Математика. – 1986. – 6. – С.55-56.

4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Физматлит, 1963.

5. Глушак А.В., Попова В.А. Обратная задача для абстрактного дифференциального уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2007. – 16. – С.1-16.

6. Глушак А.В. Операторная функция Бесселя // ДАН. – 1997. – 352,5. – С.587-589.

INVERSE PROBLEM FOR EULER-POISSON-DARBOUX EQUATION

A.N. Babaev, A.V. Glushak

Belgorod State University,
Pobedy str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Abstract. It is studied the definition problem of the right-hand side of the Euler-Poisson-Darboux equation by the additional supervision at some spatial point or at some temporal moment.

Key words: Euler-Poisson-Darboux equation, inverse coeffcient problem, unique solvability.

УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

О МЕТОДЕ ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СТОКСА

Св.А. Гриценко, И.В. Некрасова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Nekrasova_i@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе рассматривается периодическая начально-краевая задача для уравнений Стокса. С помощью метода фиктивных областей доказывается корректность исходной задачи, а именно, рассматривается корректная вспомогательная задача, определенная в более широкой области, зависящая от большого параметра и такая, что её решение сходится к решению исходной задачи при стремлении параметра к бесконечности.

Ключевые слова: уравнения Стокса, метод фиктивных областей, метод Галеркина.

1. Постановка задачи

Рассмотрим единичный куб $Y=(0,1)\times(0,1)\times(0,1)\subset\mathbb{R}^3$ и его подмножество $Y_f\subset Y$. Пусть области

$$\partial Y_f\bigcap\{y_i=0\}=\sigma_{i,0},$$

$$\partial Y_f\bigcap\{y_i=1\}=\sigma_{i,1},$$

$$i=1,2,3$$

как множества в $\mathbb{R}^2$ удовлетворяют условиям периодичности

$$\sigma_{i,0}=\sigma_{i,1},\ \ i=1,2,3\,,$$

а граница $\gamma=\partial Y_f\bigcap Y$ есть липшицева поверхность.

Рассмотрим следующую периодическую начально-краевую задачу для скорости жидкости $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y},t)$ в области Y_f, состоящую из системы дифференциальных уравнений Стокса:

$$\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}-\mu\triangle\boldsymbol{V}+\nabla Q=0,\quad \mathrm{div}_y\boldsymbol{V}=0\,,\quad \boldsymbol{y}\in Y_f,\quad t>0\,, \tag{1}$$

начального условия

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y},0)=\boldsymbol{V_0(y)},\quad \boldsymbol{y}\in Y_f\,, \tag{2}$$

краевого условия

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y},t)=0,\quad \boldsymbol{y}\in\gamma,\quad t>0 \tag{3}$$

и условий 1-периодичности по пространственной переменной $\boldsymbol{y}$ на границе $\partial Y_f\bigcap\partial Y$ для функции $\boldsymbol{V}$.

Для функциональных пространств будем использовать обозначения, принятые в [1].

Через H^0 обозначим пространство вектор-функций из $L^2((0,T);\mathbb{W}_2^1(Y_f))$, 1-периодичных по переменной $\boldsymbol{y}$ на границе $\partial Y_f\bigcap\partial Y$ и равных нулю на границе $\gamma=\partial Y_f\bigcap Y$.

Через H^1 – пространство вектор-функций из $\mathbb{W}_2^{1,1}(Y_f \times (0,T))$, 1-периодичных по переменной $\boldsymbol{y}$ на границе $\partial Y_f \bigcap \partial Y$ и равных нулю на границе $\gamma = \partial Y_f \bigcap Y$.

H^2 обозначает пространство вектор-функций из $L^2((0,T); \mathbb{W}_2^1(Y))$, 1-периодичных по переменной $\boldsymbol{y}$ на границе ∂Y.

H^3 – пространство вектор-функций из $\mathbb{W}_2^{1,1}(Y \times (0,T))$, 1-периодичных по переменной $\boldsymbol{y}$ на границе ∂Y.

2. Основной результат

Определение 1. *Обобщенным решением задачи (1)-(3) называется вектор-функция $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y},t) \in H^0$, удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$-\int_0^T \int_{Y_f} \boldsymbol{V} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t}\, d\boldsymbol{y}\, dt + \mu \int_0^T \int_{Y_f} \nabla \boldsymbol{V} : \nabla \boldsymbol{\eta}\, d\boldsymbol{y}\, dt = \int_{Y_f} \boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{y},0)\, d\boldsymbol{y}\,, \tag{4}$$

для любой соленоидальной ($\mathrm{div}\boldsymbol{\eta} = 0$) в области Y_f вектор-функции $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{y},t) \in H^1$, равной нулю при $t = T$.

Здесь используются обозначения: $A : B = tr(AB^T)$ для квадратных матриц A и B, $Y_T = Y \times (0,T)$ – цилиндр.

Теорема 1. *Существует единственное обобщенное решение задачи (1)-(3) и для него справедлива оценка:*

$$\frac{1}{2} \max_{0<t<T} \int_Y |\boldsymbol{V}|^2\, d\boldsymbol{y} + \mu \int_{Y_T} \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y_i} \right|^2 d\boldsymbol{y}\, dt \leqslant \frac{1}{2} \int_Y |\boldsymbol{V}_0|^2\, d\boldsymbol{y}\,. \tag{5}$$

Для доказательства существования и единственности обобщенного решения задачи (1)-(3) воспользуемся методом фиктивных областей. Суть метода заключается в том, что в более широкой области находятся решения вспомогательных задач, слабо сходящиеся к решению исходной задачи.

Введем положительный параметр λ. Будем рассматривать задачу (1)-(3), как предельную при $\lambda \to \infty$, для следующих вспомогательных задач, зависящих от параметра λ :

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}^\lambda}{\partial t} = \mu \Delta \boldsymbol{V}^\lambda - \nabla Q - \lambda \boldsymbol{V}^\lambda (1 - \chi(\boldsymbol{y})), Q + \lambda \mathrm{div} \boldsymbol{V}^\lambda = 0\,, \quad \boldsymbol{y} \in Y, \quad t > 0 \tag{6}$$

с начальным условием

$$\boldsymbol{V}^\lambda(\boldsymbol{y},0) = \chi \boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y})\,, \quad \boldsymbol{y} \in Y \tag{7}$$

и условиями 1-периодичности по $\boldsymbol{y}$ на границе ∂Y. Здесь $\chi(\boldsymbol{y})$ – характеристическая функция Y_f в Y:

$$\chi(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{y} \in Y_s, \\ 1, & \boldsymbol{y} \in Y_f. \end{cases}$$

Определение 2. *Обобщенным решением задачи (6)-(7) называется вектор-функция $\boldsymbol{V}^\lambda(\boldsymbol{y},t) \in H^2$, удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$-\int_{Y_T}\boldsymbol{V}^{\lambda}\frac{\partial\boldsymbol{\eta}}{\partial t}\,d\boldsymbol{y}\,dt+\mu\int_{Y_T}\nabla\boldsymbol{V}^{\lambda}:\nabla\boldsymbol{\eta}\,d\boldsymbol{y}\,dt+$$

$$+\lambda\int_{Y_T}(\mathrm{div}\boldsymbol{V}^{\lambda})\mathrm{div}\boldsymbol{\eta}\,d\boldsymbol{y}\,dt+\lambda\int_{Y_T}(1-\chi(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{V}^{\lambda}\boldsymbol{\eta}d\boldsymbol{y}\,dt=$$

$$=\int_{Y}\chi\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y})\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{y},0)\,d\boldsymbol{y} \tag{8}$$

для любой вектор-функции $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{y},t)\in H^3$, равной нулю при $t=T$.

Теорема 2. *При всех $\lambda>0$ обобщенное решение задачи (6)-(7) существует, единственно и для него справедлива оценка:*

$$\frac{1}{2}\max_{0<t<T}\int_{Y}|\boldsymbol{V}^{\lambda}|^2\,d\boldsymbol{y}+\mu\int_{Y_T}\sum_{i=1}^{3}\left|\frac{\partial\boldsymbol{V}^{\lambda}}{\partial y_i}\right|^2\,d\boldsymbol{y}\,dt\;+$$

$$+\lambda\int_{Y_T}|\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}^{\lambda}|^2\,d\boldsymbol{y}\,dt+\lambda\int_{Y_T}(1-\chi)|\boldsymbol{V}^{\lambda}|^2\,d\boldsymbol{y}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int_{Y}|\chi\boldsymbol{V}_0|^2\,d\boldsymbol{y}\,. \tag{9}$$

3. Доказательство Теоремы 2

Всюду в этом разделе для удобства изложения мы опускаем индекс λ.

Для доказательства существования обобщенного решения задачи (6)-(7) будем использовать метод Галеркина.

Обозначим через $\boldsymbol{W}^1_{2,\Pi}(Y)$ пространство вектор-функций из $\boldsymbol{W}^1_2(Y)$, 1-периодичных на границе ∂Y.

Выберем в этом пространстве полную систему вектор-функций $\{\boldsymbol{\varphi}_k(\boldsymbol{y})\}$ (назовем их базисными функциями), ортонормированную в $L_2(Y)$:

$$(\boldsymbol{\varphi}_i,\boldsymbol{\varphi}_j)=\int_{Y}\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{y})\boldsymbol{\varphi}_j(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}=\delta_{ij}\,,$$

и такую, что

$$\overline{\bigcup_{N=1}^{\infty}H_N}=\boldsymbol{W}^1_{2,\Pi}(Y)\,,$$

где конечномерное подпространство H_N представляет собой линейную оболочку первых N базисных функций.

Приближенное решение будем искать в виде:

$$\boldsymbol{V}_N(\boldsymbol{y},t)=\sum_{m=1}^{N}c_m(t)\boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y})\,. \tag{10}$$

Функция $\boldsymbol{V}_N(\boldsymbol{y},t)$ должна удовлетворять начальному условию

$$\boldsymbol{V}_N(\boldsymbol{y},0)=\boldsymbol{V}_0^N(\boldsymbol{y})\,, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{V}_0^N(\boldsymbol{y})$ есть ортогональная проекция вектора $\chi\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y})$ на подпространство H_N. Следовательно, $\chi\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{V}_0^N(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$, где $\boldsymbol{z}$ есть ортогональная составляющая вектора $\chi\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y})$ относительно H_N. Так как $\boldsymbol{V}_0^N(\boldsymbol{y})\in H_N$, то

$$\boldsymbol{V}_0^N(\boldsymbol{y})=\sum_{m=1}^N b_m\boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y})\,,$$

$$b_m=(\boldsymbol{V}_0^N(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y}))_{L_2(Y)}=(\chi\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{z},\boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y}))=(\chi\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y}))-(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y}))\,,$$

и, учитывая, что $\boldsymbol{z}\perp\boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y})$, окончательно получаем

$$b_m=(\chi\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y}))=\int_Y\chi\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y})\boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\,. \tag{12}$$

Коэффициенты разложения $c_m(t)$ в формуле (10) определяются из условия ортогональности в $L_2(Y)$ невязки

$$\mathfrak{L}(\boldsymbol{V}_N)=\frac{\partial\boldsymbol{V}_N}{\partial t}-\mu\Delta\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{N}}+\nabla Q+\lambda\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{N}}(1-\chi(\boldsymbol{y}))$$

подпространству H_N, то есть из условия

$$(\mathfrak{L}(\boldsymbol{V}_N),\boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y}))_{L_2}=0\,,\quad\forall\boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y})\in H_N,\quad m=1,2,\ldots,N\,.$$

Таким образом, учитывая, что $Q+\lambda\mathrm{div}\boldsymbol{V}=0$, для определения коэффициентов $c_m(t)$ имеем систему уравнений:

$$\int_Y\left(\frac{\partial\boldsymbol{V}_N}{\partial t}\boldsymbol{\varphi}_m+\mu\nabla\boldsymbol{V}_N:\nabla\boldsymbol{\varphi}_m+\lambda(\mathrm{div}\boldsymbol{V}_N)\mathrm{div}\boldsymbol{\varphi}_m+\lambda(1-\chi)\boldsymbol{V}_N\boldsymbol{\varphi}_m\right)d\boldsymbol{y}=0\,. \tag{13}$$

Подставляя в эти уравнения

$$\boldsymbol{V}_N=\sum_{m=1}^N c_m(t)\boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y})\,,$$

получаем систему N обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\dot{c}_m(t)+\sum_{k=1}^N c_k(t)\int_Y(\mu\nabla\boldsymbol{\varphi}_m:\nabla\boldsymbol{\varphi}_k+\lambda(\mathrm{div}\boldsymbol{\varphi}_m)\mathrm{div}\boldsymbol{\varphi}_k+\;+\lambda(1-\chi)\boldsymbol{\varphi}_m\boldsymbol{\varphi}_k)\,d\boldsymbol{y}=0\,,$$

$$c_m(0)=b_m, m=1,2,\ldots,N\,. \tag{14}$$

Полученная система при заданных начальных условиях имеет единственное решение (см.[2]), следовательно и функция

$$\boldsymbol{V}_N(\boldsymbol{y},t)=\sum_{m=1}^N c_m(t)\boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y})\,,\quad\forall N=1,2,\ldots$$

определяется однозначно.

Докажем теперь ограниченность последовательности галеркинских приближений $\{\boldsymbol{V}_N(\boldsymbol{y},t)\}$ в норме пространства H^2:

$$\|\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y},t)\|^2 = \int_{Y_T} \left(|\boldsymbol{V}|^2 + \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y_i} \right|^2 \right) d\boldsymbol{y}\, dt\,. \tag{15}$$

Для этого умножим произвольное уравнение с номером m из (14) на $c_m(t)$ и просуммируем по m от 1 до N. Получим

$$\sum_{m=1}^{N} \dot{c}_m c_m + \mu \int_Y \nabla \boldsymbol{V}_N : \nabla \boldsymbol{V}_N\, d\boldsymbol{y} + \lambda \int_Y (\mathrm{div}\boldsymbol{V}_N)^2\, d\boldsymbol{y} + \, + \lambda \int_Y (1-\chi)|\boldsymbol{V}_N|^2\, d\boldsymbol{y} = 0\,. \tag{16}$$

Далее представим первое слагаемое в виде

$$\sum_{m=1}^{N} \dot{c}_m c_m = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_Y |\boldsymbol{V}_N|^2\, d\boldsymbol{y}\,,$$

учтем, что

$$\nabla \boldsymbol{V}_N : \nabla \boldsymbol{V}_N = \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial \boldsymbol{V}_N}{\partial y_i} \right|^2 ,$$

и проинтегрируем уравнение от 0 до t :

$$\frac{1}{2}\int_Y |\boldsymbol{V}_N(\boldsymbol{y},t)|^2\, d\boldsymbol{y} + \mu \int_{Y_t} \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial \boldsymbol{V}_N}{\partial y_i} \right|^2 d\boldsymbol{y}\, d\tau +$$

$$+ \lambda \int_{Y_t} (\mathrm{div}\boldsymbol{V}_N)^2\, d\boldsymbol{y}\, d\tau + \lambda \int_{Y_t} (1-\chi)|\boldsymbol{V}_N|^2\, d\boldsymbol{y}\, d\tau = \frac{1}{2}\int_Y |\boldsymbol{V}_0^N|^2\, d\boldsymbol{y}\,. \tag{17}$$

Поскольку вектор $\boldsymbol{V}_0^N$ является ортогональной проекцией $\chi\boldsymbol{V}_0$ на подпространство H_N, то $|\boldsymbol{V}_0^N| \leqslant |\chi \boldsymbol{V}_0|$ и, следовательно,

$$\frac{1}{2}\max_{0<t<T}\int_Y |\boldsymbol{V}_N|^2\, d\boldsymbol{y} + \mu \int_{Y_T} \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial \boldsymbol{V}_N}{\partial y_i} \right|^2 d\boldsymbol{y}\, dt +$$

$$+ \lambda \int_{Y_T} (\mathrm{div}\boldsymbol{V}_N)^2\, d\boldsymbol{y}\, dt + \lambda \int_{Y_T} (1-\chi)|\boldsymbol{V}_N|^2\, d\boldsymbol{y}\, dt \leqslant \frac{1}{2}\int_Y |\chi\boldsymbol{V}_0|^2\, d\,. \tag{18}$$

Таким образом, последовательность $\{\boldsymbol{V}_N\}$ ограничена в норме (15).

Из известной теоремы функционального анализа о том, что любое ограниченное подмножество гильбертова пространства слабо компактно, следует слабая компактность $\{\boldsymbol{V}_N\}$. Таким образом, из $\{\boldsymbol{V}_N\}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся в H^2 к некоторой функции $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y},t)$. Покажем, что эта функция $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y},t)$ и является искомым обобщенным решением задачи, то есть удовлетворяет интегральному тождеству (8) для любой вектор-функции $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{y},t) \in H^3$, равной нулю при $t = T$. Для этого, в свою очередь, достаточно установить выполнение этого условия для некоторого счетного всюду плотного множества в H^3.

Докажем, что интегральное тождество (8) справедливо для любой функции $\boldsymbol{\eta}_N$ вида

$$\boldsymbol{\eta}_N(\boldsymbol{y},t)=\sum_{m=1}^{N} d_m(t)\boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{y})\,, \tag{19}$$

где $d_m(t)$ есть произвольные функции из $L^2(0,T)$.

Зафиксируем $N'\leqslant N$. Умножим каждое уравнение системы (13) на свою гладкую функцию $d_m(t)$, просуммируем по m от 1 до N' и проинтегрируем по t от 0 до T. Получим

$$\int_0^T dt\,\Big(\int_Y \frac{d\boldsymbol{V}_N}{dt}\boldsymbol{\eta}_{N'}\,d\boldsymbol{y}+\mu\int_Y \nabla\boldsymbol{V}_N:\nabla\boldsymbol{\eta}_{N'}\,d\boldsymbol{y}+ \\ +\lambda\int_Y(\mathrm{div}\boldsymbol{V}_N)\mathrm{div}\boldsymbol{\eta}_{N'}\,d\boldsymbol{y}+\lambda\int_Y(1-\chi)\boldsymbol{V}_N\boldsymbol{\eta}_{N'}\,d\boldsymbol{y}\Big)=0\,, \tag{20}$$

и далее, интегрируя первое слагаемое по частям, имеем:

$$-\int_{Y_T}\boldsymbol{V}_N(\boldsymbol{y},t)\frac{\partial\boldsymbol{\eta}_{N'}}{\partial t}\,d\boldsymbol{y}\,dt+\int_{Y_T}\mu\nabla\boldsymbol{V}_N:\nabla\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{N'}}\,d\boldsymbol{y}\,dt+ \\ +\int_{Y_T}\lambda\,(\mathrm{div}\boldsymbol{V}_N)\mathrm{div}\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{N'}}\,d\boldsymbol{y}\,dt+\int_{Y_T}\lambda(1-\chi)\boldsymbol{V}_N\boldsymbol{\eta}_{N'}\,d\boldsymbol{y}\,dt= \\ =\int_Y\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y})\boldsymbol{\eta}_{N'}(\boldsymbol{y},0)\,d\boldsymbol{y}\,. \tag{21}$$

Зафиксируем функцию $\boldsymbol{\eta}_{N'}(\boldsymbol{y},t)$ и перейдем к пределу при $N\to\infty$ по выбранной подпоследовательности. Получим интегральное тождество для $\boldsymbol{V}$ вместо $\boldsymbol{V}_N$:

$$-\int_{Y_T}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y},t)\frac{\partial\boldsymbol{\eta}_{N'}}{\partial t}\,d\boldsymbol{y}\,dt+\int_{Y_T}\mu\nabla\boldsymbol{V}:\nabla\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{N'}}\,d\boldsymbol{y}\,dt+ \\ +\int_{Y_T}\lambda(\mathrm{div}\boldsymbol{V})\mathrm{div}\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{N'}}\,d\boldsymbol{y}\,dt+\int_{Y_T}\lambda(1-\chi)\boldsymbol{V}\boldsymbol{\eta}_{N'}\,d\boldsymbol{y}\,dt= \\ =\int_Y\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y})\boldsymbol{\eta}_{N'}(\boldsymbol{y},0)\,d\boldsymbol{y}\,, \tag{22}$$

справедливое для любой функции $\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{N'}}(\boldsymbol{y},t)$ вида (19). Но такие $\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{N'}}$ всюду плотны в H^3, поэтому интегральное тождество выполняется и для любой функции $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{y},t)\in H^3$.

Таким образом,

$$\lim_{N\to\infty}\boldsymbol{V}_N=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y},t)$$

и есть искомое обобщенное решение задачи.

Заметим, что найденное обобщенное решение является единственным. Действительно, предположим, что задача (6)-(7) имеет два обобщенных решения, тогда их разность $\boldsymbol{w}$ будет удовлетворять интегральному тождеству

$$-\int_{Y_T}\boldsymbol{w}\frac{\partial\boldsymbol{\eta}}{\partial t}\,d\boldsymbol{y}\,dt+\mu\int_{Y_T}\nabla\boldsymbol{w}:\nabla\boldsymbol{\eta}\,d\boldsymbol{y}\,dt+$$

$$+\lambda\int_{Y_T}(\operatorname{div}\boldsymbol{w})\operatorname{div}\boldsymbol{\eta}\,d\boldsymbol{y}\,dt+\lambda\int_{Y_T}(1-\chi(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{w}\boldsymbol{\eta}\,d\boldsymbol{y}\,dt=0 \qquad (23)$$

для любой вектор-функции $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{y},t)\in H^3$, равной нулю при $t=T$.

Функция $\boldsymbol{w}$, таким образом, является обобщенным решением задачи (6)-(7) с однородным начальным условием $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{y},0)=0$. Тогда из неравенства (18) следует, что

$$\frac{1}{2}\max_{0<t<T}\int_Y|\boldsymbol{w}|^2\,d\boldsymbol{y}+\mu\int_{Y_T}\sum_{i=1}^{3}\left|\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial y_i}\right|^2\,d\boldsymbol{y}\,dt\;+$$

$$+\;\lambda\int_{Y_T}(\operatorname{div}\boldsymbol{w})^2\,d\boldsymbol{y}\,dt+\,\lambda\int_{Y_T}(1-\chi)|\boldsymbol{w}|^2\,d\boldsymbol{y}\,dt\leqslant 0\,,$$

т.е. $\boldsymbol{w}=0$, что и доказывает единственность решения.

4. Доказательство Теоремы 1

Теорема 1 является следствием теоремы 2 и следующей леммы.

Лемма. *Решение $\boldsymbol{V}^\lambda$ вспомогательной задачи (6)-(7) слабо в H^0 сходится к решению $\boldsymbol{V}$ задачи (1)-(3).*

□ Для каждого фиксированного λ мы нашли решение $\boldsymbol{V}^\lambda$ вспомогательной задачи (6)-(7), для которого справедлива оценка (9). Поэтому последовательность $\{\boldsymbol{V}^\lambda\}$ является ограниченной в норме (15), то есть из нее опять же можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Выбирая подпоследовательность, для которой будем сохранять прежнее обозначение, получаем, что при $\lambda\to\infty$ решение $\boldsymbol{V}^\lambda$ вспомогательной задачи сходится слабо в H^0 к решению $\boldsymbol{V}$:

$$\boldsymbol{V}^\lambda\rightharpoonup\boldsymbol{V}\,. \qquad (24)$$

В частности, мы получаем слабую в $L_2(Y\times(0,T))$ сходимость $\nabla\boldsymbol{V}^\lambda$ к $\nabla\boldsymbol{V}$:

$$\nabla\boldsymbol{V}^\lambda\rightharpoonup\nabla\boldsymbol{V}\,. \qquad (25)$$

Неравенство (9) дает сильную в H^0 сходимость $\operatorname{div}\boldsymbol{V}^\lambda$ и $(1-\chi)\boldsymbol{V}^\lambda$ к нулю:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{V}^\lambda\to 0\,, \qquad (26)$$

$$(1-\chi)\boldsymbol{V}^\lambda\to 0\,. \qquad (27)$$

Из (25),(26) следует, что

$$\operatorname{div}\boldsymbol{V}=0,\quad \boldsymbol{y}\in Y_f\,, \qquad (28)$$

из (24),(26) –

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y},t)=0,\quad \boldsymbol{y}\in Y_s\,, \qquad (29)$$

а утверждения (29) и принадлежность $\boldsymbol{V}$ пространству H^0 гарантируют выполнение краевого условия $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y},t)=0,\quad \boldsymbol{y}\in\gamma$.

Рассмотрим интегральное тождество (8) при $\lambda\to\infty$. Выберем функцию $\boldsymbol{\eta}$ так, чтобы она была финитная и соленоидальная в области Y_f.

Тогда

$$\lambda\int_0^T\int_Y(\mathrm{div}\boldsymbol{V}^\lambda)\mathrm{div}\boldsymbol{\eta}\,d\boldsymbol{y}\,dt=\lambda\int_0^T\int_{Y_f}(\mathrm{div}\boldsymbol{V}^\lambda)\mathrm{div}\boldsymbol{\eta}\,d\boldsymbol{y}\,dt+$$

$$+\lambda\int_0^T\int_{Y_s}\mathrm{div}\boldsymbol{V}^\lambda\mathrm{div}\boldsymbol{\eta}\,d\boldsymbol{y}\,dt=0,$$

так как соленоидальность $\boldsymbol{\eta}$ дает нам нуль в первом слагаемом, а финитность – во втором. Кроме того,

$$\lambda\int_0^T\int_Y(1-\chi(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{V}^\lambda\boldsymbol{\eta}\,d\boldsymbol{y}\,dt=\lambda\int_0^T\int_{Y_f}(1-\chi(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{V}^\lambda\boldsymbol{\eta}\,d\boldsymbol{y}\,dt+$$

$$+\lambda\int_0^T\int_{Y_s}(1-\chi(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{V}^\lambda\boldsymbol{\eta}\,d\boldsymbol{y}\,dt=0,$$

так как $\chi(\boldsymbol{y})=1$, если $\boldsymbol{y}\in Y_f$, и $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{y},t)=0$ при $\boldsymbol{y}\in Y_s$.

Таким образом, функция $\boldsymbol{V}=\lim\limits_{\lambda\to\infty}\boldsymbol{V}^\lambda$ удовлетворяет интегральному тождеству (4).

Неравенство (18) дает нам требуемую оценку (5). ■

Литература

1. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: УРСС, 2004.

ON THE FICTITIOUS DOMAIN METHOD FOR THE PERIODICAL INITIAL-BOUNDARY PROBLEM FOR THE STOKES EQUATIONS

Sv.A. Gritsenko, I.V. Nekrasova

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: Nekrasova_i@bsu.edu.ru

Abstract. The periodical initial-boundary problem for the Stokes equation is considered. It is proved the correctness of this problem by the fictitious domain method, namely, we consider the correct auxiliary problem on the more wide domain. This auxiliary problem depends on the large parameter and its solution tends to the solution of the original problem if the parameter tends to infinity.

Key words: Stokes equation, fictitious domain method, Galyorkin's method.

УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ АКУСТИКИ В ПОРОУПРУГИХ СЛОИСТЫХ СРЕДАХ ДЛЯ ОДНОСКОРОСТНОГО КОНТИНУУМА

И.В. Данилец, А.М. Мейрманов

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: meirmanov@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе строится математическая микроскопическая модель распространения акустических волн в пористых средах со специальной геометрией порового пространства. Доказывается корректная разрешимость задачи Коши для микроскопической модели и даётся строгий вывод усреднённых уравнений, получаемых на основе этой модели.

Ключевые слова: уравнения Стокса и Ламэ, двухмасштабная сходимость, уравнения акустики.

Введение

В современной геофизике, изучающей распространение возмущений в естественных подземных грунтах, существуют различные физические и математические модели, описывающие такого рода процессы. Долгое время основной моделью в этой области служила система уравнений Ламэ линейной теории упругости. Но начиная с работ М. Био [1] в геофизике всё больше и больше склоняются к пониманию того, что существенную роль в математическом моделировании природных грунтов играет наличие в них пор и трещин, заполненных флюидами (жидкостями или газами). Таким образом, существенно представление о том, что подземные массивы являются упругими пористыми средами. Феноменологические модели, предложенные М. Био, являются некими комбинациями уравнений Ламэ и уравнений, описывающих динамику флюида в порах (например, системы уравнений фильтрации Дарси). Хорошо известно, что основным недостатком сложных феноменологических моделей является наличие феноменологических постоянных (или функций), которые необходимо как-то доопределять. Да и саму структуру дифференциальных уравнений необходимо критически анализировать. Для понимания сути такого рода моделей Р.Барридж и Дж.Келлер [2] предложили совершенно естественный подход их обоснования. А именно, они рассмотрели математическую модель, описывающую на макроскопическом уровне поведение смеси упругого твёрдого тела и флюида, заполняющего поровое пространство. Эта модель не вызывает сомнений, поскольку состоит их уравнений Ламэ, Стокса и известных законов сохранения на общей границе "твердое тело-флюид" и содержит минимальное количество феноменологических постоянных (постоянные Ламэ, вязкость и скорость звука в флюиде), которые достаточно надёжно определяются из эксперимента. Указанная модель содержит малые и большие быстро осциллирующие коэффициенты, зависящие от малого параметра ε – безразмерного размера пор. Второе предположение авторов, также совершенно естественное, заключается в том, что все феноменологические модели, корректно описывающие данный процесс, должны как-то следовать из основной модели при стремлении малого параметра к нулю. Таким образом, корректные феноменологические модели должны появляться в результате усреднения исходной математической модели, описывающей процесс на микроскопическом уровне. Для периодической системы пор Р.Барридж и Дж.Келлер, используя метод двухмасштабного разложения, формально вывели систему уравнений Био пороупругости. Позже строгий вывод усредненных уравнений был дан в работах Г. Нгуетсенга [3] и А.Мейрманова [4, 5]. Как правило, вывод усредненных уравнений не сопровождается их математическим анализом. Это естественно, поскольку в общем случае такой анализ технически сложен и в принципе является достаточно трудной самостоятельной задачей. Целью настоящей публикации является корректность соответствующей задачи Коши для микроскопической модели и вывод на её основе усредненных уравнений для простейшей геометрии порового пространства в случае односкоростного континуума.

1. Постановка задачи

В данной статье изучается распространение акустических волн в неоднородной среде, занимающей все пространство $\mathbb{R}^3$. Рассматриваемая среда вне бесконечного слоя конечной ширины является упругим телом. В свою очередь, сам слой перфорирован системой пор, которые заполнены вязкой жидкостью. Твёрдая компонента такой среды называется скелетом грунта, а область занятая жидкостью – поровым пространством.

В безразмерных переменных (не отмеченных штрихами)

$$t' = \tau t\,, \quad \boldsymbol{x}' = L\boldsymbol{x}\,,$$

где τ – характерное время, а L – характерный размер рассматриваемого физического процесса, слой $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ задается соотношениями

$$\Omega = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \, |x_1| < 1, \, |x_2| + |x_3| < \infty\}\,,$$

поровое пространство Ω^ε_f есть периодическое повторение в Ω элементарной ячейки εY_f, где $\varepsilon = l/L$, l – средний размер пор, твёрдый скелет Ω^ε_s есть периодическое повторение в Ω элементарной ячейки εY_s, а граница $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega^\varepsilon_s \bigcap \partial\Omega^\varepsilon_f$ есть периодическое повторение в Ω липшицевой границы $\varepsilon\gamma$,

$$\gamma = \partial Y_f \bigcap \partial Y_s, \quad Y = Y_f \bigcup Y_s \bigcup \gamma, \quad Y = (0,1)\times(0,1)\times(0,1)\,.$$

Если χ^ε – характеристическая функция порового пространства $\Omega^\varepsilon_f \subset \Omega$, то

$$\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right)\,,$$

где $\chi(\boldsymbol{y})$ – характеристическая функция "жидкой ячейки" Y_f.

Сплошная среда вне Ω описывается системой уравнений Ламэ

$$\rho_* \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}_*}{\partial t^2} = \operatorname{div}\mathbb{P}_* + \rho_* \boldsymbol{F}\,, \tag{1}$$

для безразмерного перемещения среды вне Ω

$$\boldsymbol{w}_* = \frac{g\tau^2}{L^2}\boldsymbol{w}'_*\,,$$

где

$$\mathbb{P}_* = \alpha_{\lambda^*}\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_*) + \alpha_{p,*}(\operatorname{div} \boldsymbol{w}_*)\mathbb{I}\,, \tag{2}$$

$$\mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla_x \boldsymbol{u} + \nabla_x \boldsymbol{u}^T)\,,$$

$\mathbb{I}$ – шаровый тензор,

$$\alpha_{\lambda^*} = \frac{2\lambda^*\tau^2}{L^2\rho_0}\,, \quad \alpha_{p,*} = \frac{\nu^*\tau^2}{L^2\rho_0}\,,$$

λ^*, ν^* – постоянные Ламэ, ρ_* – безразмерная плотность среды соотнесенная к плотности воды ρ_0, $\boldsymbol{F}$ – заданный вектор массовых сил.

Коротко будем говорить, что область вне Ω является упругим телом плотности ρ_* и упругими характеристиками λ^* и ν^*.

Сама область Ω состоит из чередующихся слоев, параллельных плоскости $\{x_1 = 0\}$, ширины ml заполненных вязкой жидкостью плотности ρ_f и вязкости μ и слоев ширины $(1-m)l$ упругого тела плотности ρ_s с упругими характеристиками λ и ν.

Поведение жидкости в области Ω^ε_f описывается системой уравнений Стокса:

$$\rho_f \frac{\partial \boldsymbol{v}_f}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbb{P}_f + \rho_f \boldsymbol{F}\,, \tag{3}$$

$$\mathbb{P}_f = \alpha_\mu \mathbb{D}(x, \boldsymbol{v}_f) - p_f \mathbb{I}\,, \tag{4}$$

$$\frac{\partial p_f}{\partial t} + \alpha_{p,f} \operatorname{div} \boldsymbol{v}_f = 0\,, \tag{5}$$

для безразмерной скорости

$$\boldsymbol{v} = \frac{g\tau^3}{L^2}\boldsymbol{v}'$$

и давления p_f в жидкости, где

$$\alpha_\mu = \frac{2\mu\tau}{L^2\rho_0}\,, \quad \alpha_{p,f} = \rho_f c_f^2 \frac{\tau^2}{L^2}\,,$$

μ – вязкость жидкости, c_f – скорость звука в жидкости, ρ_f – безразмерная плотность жидкости соотнесенная к плотности воды ρ_0.

Наконец, поведение упругого скелета, заполняющего область Ω^ε_s, описывается системой уравнений Ламэ

$$\rho_s \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}_s}{\partial t^2} = \operatorname{div} \mathbb{P}_s + \rho_s \boldsymbol{F}\,, \tag{6}$$

$$\mathbb{P}_s = \alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) + \alpha_{p,s}(\operatorname{div} \boldsymbol{w}_s)\mathbb{I}\,, \tag{7}$$

для безразмерного перемещения среды

$$\boldsymbol{w} = \frac{g\tau^2}{L^2}\boldsymbol{w}'\,,$$

где

$$\alpha_\lambda = \frac{2\lambda\tau^2}{L^2\rho_0}\,, \quad \alpha_{p,s} = \frac{\nu\tau^2}{L^2\rho_0}\,.$$

На границе раздела между различными слоями (упругий скелет – жидкость) выполнены условия непрерывности перемещений:

$$\boldsymbol{w}_f = \boldsymbol{w}_s\,, \quad \boldsymbol{v}_f = \frac{\partial \boldsymbol{w}_f}{\partial t}\,, \tag{8}$$

и нормальных напряжений

$$\mathbb{P}_f \cdot \boldsymbol{n} = \mathbb{P}_s \cdot \boldsymbol{n}\,, \tag{9}$$

а границе раздела жидкого или твердого слоя и основной части грунта выполнены аналогичные условия

$$\boldsymbol{w}_f = \boldsymbol{w}_* \quad (\text{либо } \boldsymbol{w}_s = \boldsymbol{w}_*)\,, \tag{10}$$

$$\mathbb{P}_f \cdot \boldsymbol{n} = \mathbb{P}_* \cdot \boldsymbol{n} \quad (\text{либо } \mathbb{P}_s \cdot \boldsymbol{n} = \mathbb{P}_* \cdot \boldsymbol{n})\,, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{n} = (1,0,0)$ – вектор нормали к границе раздела.

Задача замыкается однородными начальными условиями

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{w}_*(\boldsymbol{x},0) = 0\,, \quad \frac{\partial \boldsymbol{w}_*}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) = 0\,,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\backslash\Omega, \\ &\boldsymbol{w}_f(\boldsymbol{x},0) = 0\,, \quad \frac{\partial \boldsymbol{w}_f}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) = 0\,,\ \boldsymbol{x} \in \Omega_f, \\ &\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x},0) = 0\,, \quad \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) = 0\,,\ \boldsymbol{x} \in \Omega_s\,. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Переформулируем задачу для вектора перемещений $\boldsymbol{w}$ и давления p, где

$$\boldsymbol{w} = (1-\xi)\boldsymbol{w}_* + \xi\chi^\varepsilon \boldsymbol{w}_f + \xi(1-\chi^\varepsilon)\boldsymbol{w}_s\,,$$

$$p = (1-\xi)p_* + \xi\chi^\varepsilon p_f + \xi(1-\chi^\varepsilon)p_s\,,$$

которые удовлетворяют закону сохранения количества движения

$$\rho^\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \operatorname{div} \mathbb{P}(x,\boldsymbol{w}) + \rho^\varepsilon \boldsymbol{F} \tag{13}$$

в смысле теории распределений и уравнению неразрывности (определяющим давление)

$$p + \alpha_p^\varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0 \tag{14}$$

в обычном смысле.

В уравнениях (1.13)-(1.14) используются обозначения

$$\rho^\varepsilon = (1-\xi)\rho_* + \xi\chi^\varepsilon\rho_f + \xi(1-\chi^\varepsilon)\rho_s\,,$$

$$\mathbb{P}(x,\boldsymbol{w}) = (1-\xi)\alpha_{\lambda^*}\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}) + \xi\chi^\varepsilon\alpha_\mu\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\right) + \xi(1-\chi^\varepsilon)\alpha_\lambda\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}) - p\,\mathbb{I}\,,$$

$$\alpha_p^\varepsilon = (1-\xi)\alpha_{p,*} + \xi\chi^\varepsilon\alpha_{p,f} + \xi(1-\chi^\varepsilon)\alpha_{p,s}\,,$$

а функция ξ является характеристической функцией области Ω.

В настоящей работе рассматривается случай односкоростного континуума, когда

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\mu = 0\,,\quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\lambda = \lambda_0 \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_{\lambda^*} = \lambda_0^*\,,\quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2} = \infty\,,$$

$$0 < \lambda_0,\, \lambda_0^* < \infty\,,$$

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_{p,*} = c^*\,,\quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_{p,f} = c_f\,,\quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_{p,s} = c_s\,,$$

$$0 < c^*,\, c_f,\, c_s < \infty\,.$$

В общей постановке первая краевая задача для ограниченной области Ω без контакта с чисто упругой средой была рассмотрена в [1], [2].

2. Формулировка основных результатов

Определение 1. *Назовем обобщенным решением задачи Коши (12)-(14) функции* $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ *и* p^ε *удовлетворяющие условиям регулярности*

$$\xi(1-\chi^\varepsilon)\nabla\boldsymbol{w}^\varepsilon,\, \xi\chi^\varepsilon\nabla\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t},\, (1-\xi)\nabla\boldsymbol{w}^\varepsilon \in L^2\big(\mathbb{R}^3\times(0,T)\big)\,,$$

уравнению неразрывности (1.14) почти всюду в $\mathbb{R}^3$ *и интегральному тождеству*

$$\int_{\Omega_T}\left(\rho_\varepsilon\left[\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2} - \boldsymbol{F}\right]\cdot\boldsymbol{\varphi} + \mathbb{P}(x,\boldsymbol{w}^\varepsilon) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})\right)dxdt = 0 \tag{15}$$

для всех гладких функций $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ *таких, что*

$$\boldsymbol{\varphi},\ \nabla\boldsymbol{\varphi} \in L^2\big(\mathbb{R}^3\times(0,T)\big),\quad \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},T) = \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(\boldsymbol{x},T) = 0.$$

В указанном тождестве посредством $\mathbb{A} : \mathbb{B}$ обозначена свёртка по обоим индексам двух тензоров второго ранга,

$$\mathbb{A} : \mathbb{B} = tr(\mathbb{B}^*\circ\mathbb{A}) = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}B_{ji}\,.$$

Теорема 1. *Пусть*

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\boldsymbol{F}|^2 + |\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial t}|^2\right)dx \le F^2\,.$$

Тогда при всех $\varepsilon > 0$ *на произвольном интервале времени* $[0,T]$ *существует единственное обобщённое решение* $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ *и* p^ε *задачи Коши (1.12)-(1.14) такое, что*

$$\left\|\sqrt{\alpha_\mu}\,\chi^\varepsilon\left|\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)\right| + \sqrt{\alpha_\lambda}(1-\chi^\varepsilon)\left|\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)\right|\right\|_{2,\Omega} \le C\,F^2\,, \tag{16}$$

$$\left\|\left|\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right| + (1-\xi)\alpha_{\lambda^*}\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)\right\|_{2,\mathbb{R}^3} + \|p^\varepsilon\|_{2,\mathbb{R}^3} \le C\,F^2\,, \tag{17}$$

где постоянная C *не зависит от* ε *и* $t\in(0,T)$.

Теорема 2. *1) В условиях Теоремы 1 функции $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ допускают продолжение $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ из области $\mathbb{R}^3\backslash\Omega_f^\varepsilon$ в область Ω_f^ε такое, что для всякой области*

$$B(N) = \{\boldsymbol{x} : |x_1|, |x_2|, |x_3| < N\}$$

$$\|\xi\, \boldsymbol{u}^\varepsilon(t)\|_{2,\,B(N)} \leq C\, \|\xi\,(1-\chi^\varepsilon)\boldsymbol{w}^\varepsilon(t)\|_{2,\,B(N)}, \tag{18}$$

$$\|\xi\, \mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}^\varepsilon(t))\|_{2,\,B(N)} \leq C\, \|\xi\,(1-\chi^\varepsilon)\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^\varepsilon(t))\|_{2,\,B(N)}, \tag{19}$$

с постоянной C, не зависящей от величины N, ε и $t \in (0,T)$.

2) Существует подпоследовательность из $\{\varepsilon > 0\}$ и 1-периодические по переменной $\boldsymbol{y}$ функции $P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ и $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ такие, что

$$P,\, \nabla_y \boldsymbol{U} \in L^2\left((B(N)\otimes Y)\times(0,T)\right)$$

и при $\varepsilon \searrow 0$ функции $\boldsymbol{w}^\varepsilon$, $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ сходятся слабо и двухмасштабно в $L^2\left(B(N)\times(0,T)\right)$ на каждом множестве $B(N)$ к функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$, а функции p^ε и $\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}^\varepsilon)$ сходятся двухмасштабно в $L^2\left(B(N)\times(0,T)\right)$ к функциям $P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ и $\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}) + \mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t))$ соответственно и слабо в $L^2\left(B(N)\times(0,T)\right)$ к функциям

$$p = \langle P\rangle_Y = \int_Y P dy = (1-\xi)p + \xi(p_f + p_s) \quad \text{и} \quad \mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})$$

соответственно. При этом $\xi\chi P = (1/m)\xi\chi(\boldsymbol{y})p_f(\boldsymbol{x},t)$.

Теорема 3. *Предельные функции $\boldsymbol{u} = (u_1,u_2,u_3)$ и p удовлетворяют задаче Коши для системы усредненных уравнений*

$$\tilde{\rho}\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \operatorname{div}\tilde{\mathbb{P}} + \tilde{\rho}\boldsymbol{F}, \tag{20}$$

$$\frac{\xi}{c_f}p_f + \frac{\xi}{c_s}p_s + \frac{(1-\xi)}{c^*}p + \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0, \quad \xi\, p = \xi\,(p_f + p_s), \tag{21}$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) = 0, \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3, \tag{22}$$

где

$$\tilde{\mathbb{P}} = (1-\xi)\big(\lambda_0^*\,\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}) - p\,\mathbb{I}\big) + \xi\tilde{\mathbb{P}}_s, \tag{23}$$

$$\tilde{\rho} = (1-\xi)\rho^* + \xi\hat{\rho}, \quad \hat{\rho} = m\rho_f + (1-m)\rho_s,$$

где $\tilde{\mathbb{P}}_s$, p_s и p_f определяются из формул (5.11)-(5.13).

3. Доказательство Теоремы 1

Доказательство разрешимости задачи (12)-(14) для ограниченной области $B(N)$ (с однородным условием Дирихле на границе области) стандартное. При этом, если $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon,N},\, p^{\varepsilon,N}\}$ есть решение соответствующей начально-краевой задачи, то

$$\left\|\, \left|\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{\varepsilon,N}}{\partial t^2}(t)\right| + \sqrt{\alpha_\mu}\chi^\varepsilon \left|\mathbb{D}\left(\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon,N}}{\partial t}(t)\right)\right| + \sqrt{\alpha_\lambda}(1-\chi^\varepsilon)\left|\mathbb{D}\left(\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon,N}}{\partial t}(t)\right)\right|\,\right\|_{2,\,B(N)} \leq C\,F^2, \tag{24}$$

$$\left\|(1-\xi)\alpha_{\lambda^*}\mathbb{D}\left(\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon,N}}{\partial t}(t)\right)\right\|_{2,\,B(N)}+\|p^{\varepsilon,N}\|_{2,\,B(N)}\leq C\,F^2\,, \tag{25}$$

где постоянная C не зависит от ε, N и $t\in(0,T)$. Продолжая функции $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon,N},\,p^{\varepsilon,N}\}$ нулем вне области $B(N)$ можно считать, что эти функции определены всюду в $\mathbb{R}^3$ и для них выполнены оценки

$$\left\|\left|\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{\varepsilon,N}}{\partial t^2}(t)\right|+\sqrt{\alpha_\mu}\chi^\varepsilon\left|\mathbb{D}(\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon,N}}{\partial t}(t))\right|+\sqrt{\alpha_\lambda}(1-\chi^\varepsilon)\left|\mathbb{D}\left(\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon,N}}{\partial t}(t)\right)\right|\right\|_{2,\mathbb{R}^3}\leq C\,F^2\,, \tag{26}$$

$$\left\|(1-\xi)\alpha_{\lambda^*}\mathbb{D}\left(\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon,N}}{\partial t}(t)\right)\right\|_{2,\,B(N)}+\|p^{\varepsilon,N}\|_{2,\mathbb{R}^3}\leq C\,F^2\,, \tag{27}$$

Далее воспользуемся стандартным диагональным процессом. Для $k=1,2,\ldots$ пусть $N_{k,j}$, $j=1,2,\ldots$ есть подпоследовательность последовательности $N_{k-1,j}$, $j=1,2,\ldots$, такая, что последовательность $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon,N_{k,j}},\,j=1,2,\ldots\}$ сходится слабо в $L^2\left(B(N_k)\times(0,T)\right)$ (при этом считаем, что последовательность $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon,N_{1,j}},\,j=1,2,\ldots\}$ сходится слабо в $L^2\left(B(N_1)\times(0,T)\right)$). Очевидно, что последовательность $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon,N_{k,k}},\,k=1,2,\ldots\}$ слабо сходится в $L^2\left(B(N)\times(0,T)\right)$, $N=1,2,\ldots$ к функции $\boldsymbol{w}^{\varepsilon}$, являющейся искомым решением задачи Коши (1.12) – (1.14).

4. Доказательство Теоремы 2

Первое утверждение теоремы есть результат работы [3]. Первая часть второго утверждения теоремы следует из результатов [4] и [2]. Наконец, доказательство второй части второго утверждения можно найти в [1].

5. Доказательство Теоремы 3

Доказательство теоремы стандартное и состоит в выводе макроскопических и микроскопических уравнений. Первое макроскопическое уравнение имеет вид

$$\tilde{\rho}\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}=\mathrm{div}_x\,\bar{\mathbb{P}}+\tilde{\rho}\,\boldsymbol{F}\,, \tag{28}$$

где

$$\bar{\mathbb{P}}=(1-\xi)\,\left(\lambda_0^*\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})-p\,\mathbb{I}\right)+\xi\,\bar{\mathbb{P}}_s\,, \tag{29}$$

$$\bar{\mathbb{P}}_s=\lambda_0\left((1-m)\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})+\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U})\rangle_{Y_s}\right)-p\,\mathbb{I}\,,$$

$$\tilde{\rho}=(1-\xi)\rho^*+\xi\hat{\rho}\,,\quad \hat{\rho}=m\rho_f+(1-m)\rho_s\,,$$

получается из интегрального тождества (15) после подстановки пробных функций вида $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ и предельного перехода при $\varepsilon\searrow 0$. Второе макроскопическое уравнение имеет вид

$$\frac{\xi}{c_f}\,p_f+\frac{\xi}{c_s}\,p_s+\frac{(1-\xi)}{c^*}p+\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=0\,,\quad \xi\,p=\xi\,(p_f+p_s)\,. \tag{30}$$

Оно получается из уравнения неразрывности (14), переписанного в виде интегрального тождества

$$\int_{\Omega_T}\left(\frac{1}{\alpha_p}p^{\varepsilon}\psi-\boldsymbol{w}^{\varepsilon}\cdot\nabla\psi\right)dxdt=0\,, \tag{31}$$

после предельного перехода при $\varepsilon\searrow 0$ с функциями ψ вида $\psi=\psi(\boldsymbol{x},t)$.

Первое микроскопическое уравнение имеет вид

$$\operatorname{div}_y\left((1-\chi)\lambda_0\left(\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})+\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U})\right)-P\,\mathbb{I}\right)=0\,,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega,\quad \boldsymbol{y}\in Y\,. \tag{32}$$

Оно получается из интегрального тождества (2.1)после подстановки пробных функций вида $\boldsymbol{\varphi}=\varepsilon h(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$, где $\operatorname{supp}h\in\Omega$ и предельного перехода при $\varepsilon\searrow 0$.

Второе микроскопическое уравнение имеет вид

$$(1-\chi)\left(\frac{1}{c_s}P+\operatorname{div}\boldsymbol{u}+\operatorname{div}_{\,y}\boldsymbol{U}\right)=0\,,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega,\quad \boldsymbol{y}\in Y\,, \tag{33}$$

и получается из уравнения неразрывности (1.14) после его умножения на $\xi\,(1-\chi^{\varepsilon})$ и двухмасштабного предельного перехода при $\varepsilon\searrow 0$.

Далее необходимо решить систему (32), (33), определить величины $\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U})\rangle_{Y_s}$ и p_s через величины $\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})$, $\operatorname{div}\boldsymbol{u}$ и p_f и подставить найденные выражения в макроскопические уравнения (28) и (30), что и приведет в итоге к требуемым усредненным уравнениям:

$$\tilde{\rho}\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}=\operatorname{div}_x\tilde{\mathbb{P}}+\tilde{\rho}\,\boldsymbol{F}\,,$$

где

$$\tilde{\mathbb{P}}=(1-\xi)\,\left(\lambda_0^*\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})-p\,\mathbb{I}\right)+\xi\,\tilde{\mathbb{P}}_s\,,$$

а тензор $\tilde{\mathbb{P}}_s$ есть тензор $\bar{\mathbb{P}}_s$, в котором величины $\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U})\rangle_{Y_s}$ и p_s выражены через величины $\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})$, $\operatorname{div}\boldsymbol{u}$ и p_f. Для этого перепишем уравнения (32), (33) в виде

$$\operatorname{div}_y\left((1-\chi)\lambda_0\left(\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})+\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U})\right)-(1-\chi)\left(P_s-\frac{p_f}{m}\right)\mathbb{I}\right)=0\,,$$

$$(1-\chi)\left(\frac{1}{c_s}\left(P_s-\frac{p_f}{m}\right)+\operatorname{div}\boldsymbol{u}+\frac{p_f}{m\,c_s}+\operatorname{div}_{\,y}\boldsymbol{U}\right)=0\,,$$

и положим

$$\boldsymbol{U}=\sum_{i,j=1}^{3}\boldsymbol{U}^{(ij)}(\boldsymbol{y})D_{ij}+\boldsymbol{U}^{(0)}(\boldsymbol{y})\beta\,,$$

$$P_s-\frac{p_f}{m}=\sum_{i,j=1}^{3}P^{(ij)}(\boldsymbol{y})D_{ij}+P^{(0)}(\boldsymbol{y})\beta\,,$$

где

$$D_{ij}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},t)+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},t)\right),\quad \boldsymbol{u}=(u_1,\,u_2,\,u_3),$$

$$\beta=\operatorname{div}\boldsymbol{u}+\frac{p_f}{m\,c_s}\,.$$

Функции $\boldsymbol{U}^{(ij)}$, $P^{(ij)}$, $\boldsymbol{U}^{(0)}$ и $P^{(0)}$ определяются из следующих периодических краевых задач на элементарной ячейке Y:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{div}_y\Big((1-\chi)\Big(\lambda_0\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}^{(ij)})+\lambda_0\mathbb{J}^{ij}-P^{(ij)}\mathbb{I}\Big)\Big)=0,\\ (1-\chi)\left(\dfrac{1}{c_s}P^{(ij)}+\operatorname{div}_y\boldsymbol{U}^{(ij)}\right)=0;\end{array}\right\}\qquad(34)$$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{div}_y\Big((1-\chi)\Big(\lambda_0\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}^{(0)})-P^{(0)}\mathbb{I}\Big)\Big)=0,\\ (1-\chi)\left(\dfrac{1}{c_s}P^{(0)}+\operatorname{div}_y\boldsymbol{U}^{(0)}+1\right)=0\,,\end{array}\right\}\qquad(35)$$

где $\mathbb{J}^{ij}$ – симметричная матрица 3×3 (тензор второго порядка), у которой по диагонали стоят единицы, при $i\neq j$ на пересечении i-й строки и j-го столбца и на пересечении j – той строки и i-го столбца стоит $1/2$, а на остальных местах – нули.

В силу геометрии порового пространства ($\chi(\boldsymbol{y})=\chi(y_1)$), решения систем (34) и (35) зависят только от переменной y_1. Поэтому эти системы примут вид

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d}{dy_1}\left((1-\chi)\left(\lambda_0\left(\dfrac{dU_1^{(ij)}}{dy_1}+J_{11}^{(ij)}\right)+c_s\dfrac{dU_1^{(ij)}}{dy_1}\right)\right)=0\,,\\[2ex] \dfrac{d}{dy_1}\left((1-\chi)\left(\dfrac{dU_2^{(ij)}}{dy_1}+J_{21}^{(ij)}\right)\right)=0\,,\\[2ex] \dfrac{d}{dy_1}\left((1-\chi)\left(\dfrac{dU_3^{(ij)}}{dy_1}+J_{31}^{(ij)}\right)\right)=0\,,\end{array}\right\}\qquad(36)$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d}{dy_1}\left((1-\chi)\left(\lambda_0\dfrac{dU_1^{(0)}}{dy_1}+c_s\dfrac{dU_1^{(0)}}{dy_1}+c_s\right)\right)=0\,,\\[2ex] \dfrac{d}{dy_1}\left((1-\chi)\,\dfrac{dU_2^{(0)}}{dy_1}\right)=0\,,\\[2ex] \dfrac{d}{dy_1}\left((1-\chi)\,\dfrac{dU_3^{(0)}}{dy_1}\right)=0\,.\end{array}\right\}\qquad(37)$$

Единственными решениями этих систем будут функции

$$(1-\chi)\frac{d\boldsymbol{U}^{(11)}}{dy_1}=(1-\chi)\left(-\frac{\lambda_0}{\lambda_0+c_s},0,0\right)\,,\quad (1-\chi)P^{(11)}=(1-\chi)\frac{\lambda_0\,c_s}{\lambda_0+c_s}\,,$$

$$(1-\chi)\frac{d\boldsymbol{U}^{(12)}}{dy_1}=(1-\chi)\frac{d\boldsymbol{U}^{(21)}}{dy_1}=(1-\chi)\left(0,-\frac{1}{2},0\right)\,,$$

$$(1-\chi)P^{(12)}=(1-\chi)P^{(21)}=0\,,$$

$$(1-\chi)\frac{d\boldsymbol{U}^{(13)}}{dy_1}=(1-\chi)\frac{d\boldsymbol{U}^{(31)}}{dy_1}=(1-\chi)\left(0,0,-\frac{1}{2}\right),$$
$$(1-\chi)P^{(13)}=(1-\chi)P^{(31)}=0,$$

$$(1-\chi)\boldsymbol{U}^{(22)}=(1-\chi)\boldsymbol{U}^{(33)}=0,\quad (1-\chi)P^{(22)}=(1-\chi)P^{(33)}=0,$$

$$(1-\chi)\frac{d\boldsymbol{U}^{(0)}}{dy_1}=(1-\chi)\Big(-\frac{c_s}{\lambda_0+c_s},0,0\Big),\qquad (1-\chi)P^{(0)}=-(1-\chi)\frac{\lambda_0\,c_s}{\lambda_0+c_s}.$$

Таким образом,

$$\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U})\rangle_{Y_s}=\beta\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}^{(0)})\rangle_{Y_s}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}^{(11)})\rangle_{Y_s}+$$
$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}^{(12)})\rangle_{Y_s}+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}^{(13)})\rangle_{Y_s}=$$
$$(1-m)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\begin{pmatrix}-\dfrac{\lambda_0}{\lambda_0+c_s} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\frac{(1-m)}{4}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+$$
$$+\frac{(1-m)}{4}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}+(1-m)\beta\begin{pmatrix}-\dfrac{c_s}{\lambda_0+c_s} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=$$
$$-\frac{(1-m)}{4}\begin{pmatrix}\dfrac{4\lambda_0}{(\lambda_0+c_s)}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\\ \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & 0 & 0\\ \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) & 0 & 0\end{pmatrix}+$$
$$+(1-m)\beta\begin{pmatrix}-\dfrac{c_s}{\lambda_0+c_s} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Аналогично,

$$p_s-\frac{(1-m)}{m}p_f=\left\langle P_s-\frac{p_f}{m}\right\rangle_{Y_s}=\sum_{i,j=1}^{3}\langle P^{(ij)}\rangle_{Y_s}D_{ij}+\langle P^{(0)}\rangle_{Y_s}\beta=$$

$$
= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\langle P^{(11)}\rangle_{Y_s} + \langle P^{(0)}\rangle_{Y_s}\beta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(1-m)\frac{\lambda_0\, c_s}{(\lambda_0+c_s)} - \beta(1-m)\frac{\lambda_0\, c_s}{(\lambda_0+c_s)} =
$$

$$
-(1-m)\frac{\lambda_0\, c_s}{(\lambda_0+c_s)}\,\mathrm{div}'\,\boldsymbol{u} - \frac{\lambda_0(1-m)}{(\lambda_0+c_s)m}\,p_f\,,
$$

Следовательно,

$$
p_s = -(1-m)\frac{\lambda_0\, c_s}{(\lambda_0+c_s)}\,\mathrm{div}'\,\boldsymbol{u} + \frac{c_s(1-m)}{(\lambda_0+c_s)m}\,p_f\,, \tag{38}
$$

$$
p = p_s + p_f = -(1-m)\frac{\lambda_0\, c_s}{(\lambda_0+c_s)}\,\mathrm{div}'\,\boldsymbol{u} + \frac{c_s+m\lambda_0}{(\lambda_0+c_s)m}\,p_f\,, \tag{39}
$$

где

$$
\mathrm{div}'\,\boldsymbol{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\,.
$$

Собирая все вычисленные слагаемые вместе, получим

$$
\tilde{\mathbb{P}}_s = \lambda_0\left((1-m)\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}) + \langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U})\rangle_{Y_s}\right) - p\,\mathbb{I} = \tag{40}
$$

$$
\lambda_0(1-m)\begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\
\frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\
\frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3}
\end{pmatrix} -
$$

$$
-\frac{(1-m)\,\lambda_0\, c_s}{(\lambda_0+c_s)m}\,p_f\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} - p\,\mathbb{I}\,.
$$

Литература

1. Мейрманов А.М. Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах // Сиб. матем. журнал. – 2007. – 48,3. – С.645-667.

2. Meirmanov A. A description of acoustic seismic wave propagation in elastic porous media via homogenizaton // SIAM J. Math. Anal. – 2008. – 40,3. – P.1272-1289.

3. Conca C. On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics // J. math. pures et appl. – 1985. – 64. – P.31-75.

4. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. – 1989. – 20,3. – P.608-623.

DERIVATION OF ACOUSTIC EQUATIONS IN POROUS STRATIFIED MEDIA FOR THE ONE-VELOCITY CONTINUUM

I.V. Danilets, A.M. Meirmanov

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: meirmanov@bsu.edu.ru

Abstract. The mathematical microscopic model of the acoustic wave propagation in porous media with special geometry of porous space is biult. Correct solvability of the Cauchy problem for the microscopic model is proved and, on the basis on it, the rigorous derivation of averaged equations is given.

Key words: Stock's equations and Lame's equations, twin-scale convergence, acoustic equations.

УДК 511.3

ДРОБНЫЕ МОМЕНТЫ РЯДОВ ДИРИХЛЕ ИЗ КЛАССА СЕЛЬБЕРГА

Д.Б. Демидов

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Demidovnext@yandex.ru

Аннотация. Получена асимптотическая формула и нижняя оценка дробных моментов рядов Дирихле из класса Сельберга.

Ключевые слова: ряд Дирихле, дробные моменты.

1. Введение

Пусть $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана, s – комплексная переменная. В книге [1, с. 155] приведена теорема А.Е. Ингама о том, что

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k}\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_k^2(n)}{n^{2\sigma}}\,,$$

где $\dfrac{1}{2}<\sigma<1,\ \ 0<k\le 2$, $\tau_k(n)$ – коэффициенты ряда Дирихле для $\zeta^k(s)$ при $\mathrm{Re}s>1$.

В 1981 году Р.Т. Турганалиев [2] доказал асимптотическое равенство со степенным понижением для дробного момента дзета-функции. Результат Турганалиева изложен в нижеследующем утверждении.

Пусть $\dfrac{1}{2}<\sigma<1,\ \ 0<k<2$, *тогда выполняется*

$$\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k}\,dt=T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_k^2(n)}{n^{2\sigma}}+O(T^{1-\xi})\,,$$

где $0<\xi=\xi(\sigma,k)$.

Основная идея его работы заключалась в приближении дробной степени дзета-функции конечным отрезком ряда Дирихле.

D.R. Heath-Brown в своей работе [3] получил правильные по порядку верхнюю и нижнюю оценки для дробных моментов на критической прямой. Его результат представлен в следующих утверждениях.

1. *Пусть* k *– рациональное число,* $k>0$, *тогда*

$$\int_1^T |\zeta(1/2+it)|^{2k}dt\gg T\log^{k^2}T\,.$$

2. *При* $k=1/n$, n *– натуральное число, тогда справедливо неравенство:*

$$\int_1^T |\zeta(1/2+it)|^{2k}dt\ll T\log^{k^2}T\,.$$

В 1985 году И.Ш. Джаббаров [4] получил асимптотическую формулу для дробных моментов $\zeta(\sigma+it)$ при σ стремящемся к $1/2$ с ростом T.

Пусть $\dfrac{1}{2}+\dfrac{(\ln\ln\ln T)^2}{\ln\ln T}\le\sigma<1,\ \ 0<k\le 2,\ \ T\ge 10^3$. *Тогда справедлива формула*

$$\int\limits_1^T|\zeta(\sigma+it)|^{2k}\,dt=T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_k^2(n)}{n^{2\sigma}}+O\left(\Delta\left(T^{1-\frac{2\sigma-1}{2(3-2\sigma)}}+T^{1-\frac{2\sigma-1}{2-\sigma}(1-k(1-\sigma))}\right)\right),$$

где

$$\Delta=\exp\left\{c_0\frac{(\ln\ln\ln T)^2}{\ln\ln T}\right\},\quad c_0>0\,.$$

В 2007 г. A. Laurincikas и J. Steuding [5] изучали свойства дробных моментов от специального вида дзета-функций, ассоциированных с параболическими формами. Для формулировки теоремы A. Laurincikas и J. Steuding нам понадобятся следующие определения.

Пусть $SL_2(\mathbb{Z})$ – полная модулярная группа, состоит из целочисленных матриц с определителем равным единице.

Функция $f(z)$ – мероморфная на верхней полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$, r – целое число. Предположим, что $f(z)$ удовлетворяет соотношению

$$f(\gamma z)=(cz+d)^r f(z)\ \text{ для всех }\ \gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})\,.$$

Далее предположим, что $f(z)$ обращается в нуль на бесконечности, т.е. $f(z)$ имеет разложение в ряд Фурье

$$f(z)=1+\sum_{n=2}^{\infty}c(n)e^{2\pi iz}\,,$$

Она называется параболической формой веса r относительно $SL_2(\mathbb{Z})$. Функция

$$\phi(s,f)=1+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{c(m)}{m^s}\,,\ \ s=\sigma+it\,,$$

называется дзета-функция, ассоциированная с параболической формой $f(z)$. Функция $\phi(s,f)$ удовлетворяет функциональному уравнению вида:

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\phi(s,f)=(-1)^{r/2}(2\pi)^{s-r}\Gamma(r-s)\phi(r-s,f)\,,$$

где $\Gamma(s)$ – гамма-функция Эйлера.

Основное утверждение статьи [5] заключается в следующем.

Пусть $k=1/n$, n *– натуральное число. Тогда при* $T\to\infty$

$$\int\limits_0^T|\phi(r/2+it,f)|^{2k}dt\gg T(\ln T)^{k^2}\,.$$

Пусть, далее, выполняется аналог гипотезы Римана для $\phi(s,f)$ и n – натуральное чётное число. Тогда

$$\int\limits_0^T |\phi(r/2+it,f)|^{2k}dt \ll T(\ln T)^{k^2}\,.$$

В настоящей работе выводится асимптотическая при $T\to\infty$ формула для интеграла

$$I_k(\sigma,T)=\int\limits_1^T |F(\sigma+it)|^{2k}dt$$

и правильная по порядку нижняя оценка для интеграла $I_k(1/2,T)$, где $F(s)$ – функция из класса Сельберга степени 2. Этот класс был определен в 1992 году А. Сельбергом [6] следующим образом:

Определение 1. *Рядом Дирихле из класса S называется функция $F(s), s=\sigma+it$, удовлетворяющая следующим условиям:*
1) $F(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a(n)}{n^s}\,,\quad \mathrm{Re}s>1;$
2) существует неотрицательное целое число m такое, что функция $(s-1)^mF(s)$ целая;
3) коэффициенты Дирихле $a(n)$ удовлетворяют неравенствам

$$a(n)\ll_{\epsilon} n^{\varepsilon}$$

для любого положительного ε, причем $a(1)=1$;
4) существует функция $\gamma_F(s)$ вида

$$\gamma_F(s)=\varepsilon_1 Q^s\prod_{l=1}^{k}\Gamma(\lambda_l s+\mu_l)\,,$$

где

$$|\varepsilon_1|=1\,,\quad Q>0\,,\quad \lambda_l>0\,,\quad \mathrm{Re}\,\mu_l\geq 0\,,$$

и такая, что для функции $\Phi(s)=\gamma_F(s)F(s)$ справедливо тождество

$$\Phi(s)=\overline{\Phi}(1-\overline{s})\,; \tag{1}$$

5) при $\sigma>1$ функция $F(s)$ раскладывается в эйлерово произведение:

$$F(s)=\prod_p(1+a(p)p^{-s}+a(p^2)p^{-2s}+\cdots)\,,$$

здесь и далее, p обозначает простые числа;

$$\ln\,F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(n)}{n^s}\,,$$

где $b(n) = 0$ *, если* n *не равно положительной степени простого числа, причем* $b(n) \ll n^\theta$ *для некоторого* $\theta \le 1/2$.

Определение 2. *Степенью функции* $F(s)$ *из класса Сельберга называется число* d_F, *которое определяется следующим образом:*

$$d_F = 2\sum_{l=1}^{k} \lambda_l\,.$$

Определение 3. *Примитивной функцией из класса* S *степени 2 называется функция* $F(s)$, *которая не представляется в виде* $G_1(s)G_2(s)$, *где* $G_1(s)$, $G_2(s) \in S$.

Для примитивных функций Сельберг сформулировал в [6] ряд гипотез, в частности нам понадобится в дальнейшем следующая.

Гипотеза 1. *При* $x \to \infty$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{p\le x} \frac{|a(p)|^2}{p} = \ln\ln x + O(1), \tag{2}$$

где $a(n)$ *– коэффициенты Дирихле примитивной функции* $F(s)$.

Пусть в дальнейшем коэффициенты Дирихле функции $F(s)$ удовлетворяют гипотезе, которая представлена в [7]:

Гипотеза 2. *При* $x \to \infty$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{n\le x} |a(n)|^2 = A_F x + O\left(x \ln^{-4} x\right), \tag{3}$$

где $a(n)$ *– коэффициенты Дирихле примитивной функции* $F(s)$.

Пусть $k = \dfrac{u}{v}$, $0 < k < 1$, u, v – взаимно простые натуральные числа, $T \ge 10$, $F(s)$ – примитивная функция Дирихле из класса Сельберга степени 2, $s = \sigma + it$. Определим мультипликативную функцию $d_k(n)$ следующим образом:

$$F^k(s) = \prod_p (1 + a(p)p^{-s} + a(p^2)p^{-2s} + ...)^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{n^s}\,,$$

где $s = \sigma + it, \sigma > 1$. Основной результат работы изложен в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть* $T > T_0 > 0$, $0 < k < 1$, $k = \dfrac{u}{v}$, u, v *– взаимно простые натуральные числа,* $F(s)$ *– функция из класса Сельберга степени 2,* $s = \sigma + it$, *и пусть коэффициенты Дирихле* $a(n)$ *функции* $F(s)$ *удовлетворяют формулам (2), (3). Тогда для функции* $I_k(\sigma, T)$ *выполняется:*

$$I_k(\sigma, T) = T\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}} + O\left(\frac{T}{(\ln\ln T)^k}\right)\,,$$

при $\dfrac{1}{2} + \dfrac{c\ln\ln T}{\ln T} \le \sigma < 1$, $c = \dfrac{2}{3}u + \dfrac{1}{2}$.

Для $I_k(1/2,T)$ справедлива оценка

$$I_k\left(\frac{1}{2},T\right) \gg T\left(\ln T\right)^{k^2}.$$

2. Вспомагательные результаты

Лемма 1 (см. [8, с. 112]). *Пусть $f(s)$ – регулярная в полосе $\alpha < \operatorname{Re} s < \beta$ и конечная для $\alpha \le \operatorname{Re} s \le \beta$. Кроме того, $f(s) \to 0$ при $|\operatorname{Im} s| \to \infty$, $\alpha \le \operatorname{Re} s \le \beta$. Тогда для $\alpha \le \gamma \le \beta$ и $q > 0$ выполняется:*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\gamma+it)|^q\,dt \le \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(\alpha+it)|^q dt\right)^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(\beta+it)|^q dt\right)^{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}}.$$

Лемма 2 (см. [9]). *Пусть c_n – произвольная последовательность комплексных чисел такая, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2$ сходится. Тогда*

$$\int\limits_0^T\left|\sum_{n=1}^{N} c_n n^{it}\right|^2 dt = \sum_{n=1}^{N}|c_n|^2(T+O(n)).$$

Лемма 3 (см. см. в [7]). *Пусть ε – произвольно малое положительное число, $F(s)$ – функция из класса Сельберга степени 2, $s=\sigma+it$, $0,5T \le t \le 2,5T$ и $T \ge T_0 > 0$. Тогда справедлива следующая асимптотическая формула*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)\exp\left(-n/T\right)}{n^s} +$$
$$+\bar{\varepsilon}_2^2(Q_1 t)^{1-2s}\exp\left(2it-2iQ_2\ln t\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{a}(n)}{n^{1-s}}\left(1-\exp\left(-\frac{Q_1^2t^2}{nT}\right)\right)\right)+O(T^{\varepsilon-\frac{1}{2}}),$$

где

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1\exp\left(i\left(\sum_{l=1}^{k}(\operatorname{Im}\mu_l)\ln\lambda_l + \frac{\pi}{2}\sum_{l=1}^{k}\operatorname{Re}\mu_l - \frac{\pi}{4}(k-1)\right)\right),$$

$$Q_1 = Q\exp\left(\sum_{l=1}^{k}\lambda_l\ln\lambda_l\right),\quad Q_2 = \sum_{l=1}^{k}\operatorname{Im}\mu_l,$$

$\varepsilon_1, Q, \lambda_l, \mu_l$ – постоянные из функционального уравнения (1) для функции $F(s)$.

Лемма 4. *Пусть $F(s)$ – функция из класса Сельберга степени 2, $s=\sigma+it$, $\dfrac{\ln\ln T}{2\ln T} \le \sigma < 1$. Справедливо неравенство*

$$\int\limits_{T/2}^{T}|F(\sigma+it)|^2 dt \ll T\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)^{-1}.$$

□ Применяя лемму 3 к функции $F(s), s=\sigma+it, \sigma \geq \dfrac{\ln\ln T}{2\ln T}$, имеем

$$\int\limits_{T/2}^{T} |F(\sigma+it)|^2 dt \ll \int\limits_{T/2}^{T} \left|\sum_{n\leq T} \frac{a(n)}{n^{\sigma+it}}\right|^2 dt + T^{1-2\sigma} \int\limits_{T/2}^{T} \left|\sum_{n\leq T} \frac{\bar{a}(n)}{n^{1-\sigma-it}}\right|^2 dt +$$

$$+U_1+U_2+U_3+U_4+T^{2\varepsilon},$$

где

$$U_1 = \int\limits_{T/2}^{T} \left|\sum_{n\leq T} \frac{a(n)}{n^{\sigma+it}} \left(1-e^{-\frac{n}{T}}\right)\right|^2 dt;$$

$$U_2 = \int\limits_{T/2}^{T} \left|\sum_{n> T} \frac{a(n)}{n^{\sigma+it}} e^{-\frac{n}{T}}\right|^2 dt;$$

$$U_3 = T^{1-2\sigma}\int\limits_{T/2}^{T} \left|\sum_{n\leq T} \frac{\bar{a}(n)}{n^{1-\sigma-it}} e^{-\frac{Q_1^2 t^2}{nT}}\right|^2 dt;$$

$$U_4 = T^{1-2\sigma}\int\limits_{T/2}^{T} \left|\sum_{n> T} \frac{\bar{a}(n)}{n^{1-\sigma-it}} \left(1-e^{-\frac{Q_1^2 t^2}{nT}}\right)\right|^2 dt.$$

Повторяя рассуждения работы [7, с. 11] для интегралов U_1, U_2, U_3, U_4, получим

$$\int\limits_{T/2}^{T} |F(\sigma+it)|^2 dt \ll \int\limits_{T/2}^{T} \left|\sum_{n\leq T} \frac{a(n)}{n^{\sigma+it}}\right|^2 dt + T^{1-2\sigma} \int\limits_{T/2}^{T} \left|\sum_{n\leq T} \frac{\bar{a}(n)}{n^{1-\sigma-it}}\right|^2 dt + T.$$

Пользуясь равенством

$$\left|\sum_{n\leq T} \frac{a(n)}{n^{\sigma+it}}\right|^2 = \sum_{n\leq T} \frac{a(n)}{n^{\sigma+it}} \sum_{n\leq T} \frac{\overline{a}(n)}{n^{\sigma-it}},$$

имеем

$$\int\limits_{T/2}^{T} |F(\sigma+it)|^2 dt \ll T\sum_{n\leq T} \frac{|a(n)|^2}{n^{2\sigma}} + \sum_{n\leq T} \sum_{m\leq T, m\neq n} \frac{|a(n)||\overline{a}(m)|}{(nm)^{\sigma}\ln(n/m)} +$$

$$+T^{2-2\sigma} \sum_{n\leq T} \frac{|a(n)|^2}{n^{2-2\sigma}} + T^{1-2\sigma} \sum_{n\leq T} \sum_{m\leq T, m\neq n} \frac{|a(n)||\overline{a}(m)|}{(nm)^{1-\sigma}} + T. \tag{4}$$

Применяя формулу частного суммирования к первой и третьей суммам из правой части последнего неравенства и пользуясь гипотезой 2, получим

$$T\sum_{n\le T}\frac{|a(n)|^2}{n^{2\sigma}}+T^{2-2\sigma}\sum_{n\le T}\frac{|a(n)|^2}{n^{2-2\sigma}}\ll T(\sigma-1/2)^{-1}+T\,.$$

Теперь рассмотрим сумму

$$\sum_{n\le T}\sum_{m\le T,m\ne n}\frac{|a(n)||\overline{a}(m)|}{(nm)^{\sigma}\ln(n/m)}\ll\sum_{1\le h\le T}\frac{1}{h}\sum_{m\le T}\frac{|a(m+h)||\overline{a}(m)|m}{((m+h)m)^{\sigma}}\ll$$

$$\ll\sum_{1\le h\le T}\frac{1}{h}\sqrt{\sum_{m\le T}\frac{|a(m)|^2}{m^{2\sigma-2}}\sum_{l\le T}\frac{|a(l)|^2}{l^{2\sigma}}}\,.$$

Применим к последним суммам формулу частного суммирования и гипотезу 2. Тогда

$$\sum_{n\le T}\sum_{m\le T,m\ne n}\frac{|a(n)||\overline{a}(m)|}{(nm)^{\sigma}\ln(n/m)}\ll T^{2-2\sigma}\ln T\,.$$

Таким же образом можно оценить следующую сумму

$$T^{1-2\sigma}\sum_{n\le T}\sum_{m\le T,m\ne n}\frac{|a(n)||\overline{a}(m)|}{(nm)^{1-\sigma}}\ll T^{2-2\sigma}\ln T\,.$$

Подставляя получившиеся неравенства в соотношение (4), получаем утверждение леммы. ■

Лемма 5 (см. [3, с. 70].) *Пусть $F(s)$ – функция из класса S степени 2, $s=\sigma+it$, $\frac{1}{2}\le\sigma<1$ и $T\ge T_0>0$. Тогда для рационального числа $0<k<1$ справедливо неравенство*

$$J(\sigma)\ll T^{\sigma-1/2}J(1/2)^{3/2-\sigma}+e^{-\frac{kT^2}{8}}\,,$$

где

$$J(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F(\sigma+it)|^{2k}w(t)dt\,, \tag{5}$$

$$w(t)=\int\limits_{T}^{2T}e^{-2k(t-\tau)^2}d\tau\,, \tag{6}$$

Лемма 6. *Пусть $F(s)$ – функция из класса Сельберга степени 2 и $s=\sigma+it$. Пусть далее $1/2\le\sigma_0<\sigma<1, k=u/v$, где $u<v$ с натуральными числами u,v и $T\ge T_0>0, N\le T^{15/16}$. Тогда выполняется неравенство*

$$K(\sigma)\ll K(\sigma_0)^{\frac{5-4\sigma}{5-4\sigma_0}}(TN^{-\frac{5}{4v}})^{\frac{4\sigma-4\sigma_0}{5-4\sigma_0}}+K(1/2)^{\frac{5-4\sigma}{5-4\sigma_0}}e^{-\frac{kT^2}{8}(\sigma-\sigma_0)}\,,$$

где

$$K(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(\sigma+it)|^{\frac{2}{v}}w(t)dt, \tag{7}$$

$w(t)$ – определяется формулой (6),

$$g(\sigma+it)=F^{u}(\sigma+it)-\left(\sum_{n\le N}\frac{d_k(n)}{n^{\sigma+it}}\right)^{v}, \tag{8}$$

$d_k(n)$ – коэффициенты Дирихле для функции $F^k(s)$.

□ Пусть $F(s)$ – функция из класса Сельберга степени 2, тогда существует неотрицательное число m такое, что функция $(s-1)^mF(s)$ – целая. Мы будем пользоваться леммой 1. Возьмем

$$f(s)=(s-1)^{mu}g(s)e^{u(s-i\tau)^2},$$

$\gamma=\sigma, \alpha=\sigma_0, \beta=5/4$ и $q=2/v$ в лемме 1, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(\sigma+it)|^{2/v}dt\le\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(\sigma_0+it)|^{2/v}dt\right)^{\frac{5-4\sigma}{5-4\sigma_0}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(5/4+it)|^{2/v}dt\right)^{\frac{4\sigma-4\sigma_0}{5-4\sigma_0}}. \tag{9}$$

Рассмотрим отдельно интегралы в формуле (9)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(\sigma+it)|^{2/v}e^{-2k(t-\tau)^2}dt\ll\int\limits_{\tau/2}^{3\tau/2}|g(\sigma+it)|^{2/v}e^{-2k(t-\tau)^2}dt+e^{-\frac{2k\tau^2}{5}}\ll$$

$$\ll\tau^{-2mk}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(\sigma+it)|^{2/v}dt+e^{-\frac{2k\tau^2}{5}},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(\sigma_0+it)|^{2/v}dt\ll\tau^{2mk}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(\sigma_0+it)|^{2/v}e^{-2k(t-\tau)^2}dt+e^{-\frac{2k\tau^2}{5}},$$

аналогично

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(5/4+it)|^{2/v}dt\ll\tau^{2mk}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(5/4+it)|^{2/v}e^{-2k(t-\tau)^2}dt+e^{-\frac{2k\tau^2}{5}}. \tag{10}$$

Для подынтегральной функции в формуле (10) справедливо

$$g(5/4+it)=\sum_{n>N}\frac{A_k(n)}{n^{5/4+it}},$$

где

$$A_k(n) = \sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_v=n} \prod_{j=1}^{v} d_k(n_j) - \sum_{\substack{n_1\cdot\ldots\cdot n_v=n,\\ n_1\le N_1,\\ \ldots\\ n_v\le N_1}} \prod_{j=1}^{v} d_k(n_j),$$

$$|A_k(n)| \ll n^{\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0\,.$$

Подставляя все полученные оценки в формулу (9) и интегрируя по промежутку $T \le \tau \le 2T$, получаем

$$K(\sigma) \ll K(\sigma_0)^{\frac{5-4\sigma}{5-4\sigma_0}} \left[\left(\int\limits_{T/2}^{3T} \left| \sum_{n>N} \frac{A_k(n)}{n^{5/4+it}} \right|^{2/v} dt \right)^{\frac{4\sigma-4\sigma_0}{5-4\sigma_0}} + e^{-\frac{T^2k}{8}(\sigma-\sigma_0)} \right]. \tag{11}$$

Применяя лемму 2 к следующему интегралу, имеем

$$\int\limits_{T/2}^{3T} \left| \sum_{n>N} \frac{A_k(n)}{n^{5/4+it}} \right|^{2} dt \ll T \sum_{n>N} \frac{|A_k(n)|^2}{n^{5/2}} + \sum_{n>N} \frac{|A_k(n)|^2}{n^{3/2}}\,. \tag{12}$$

Воспользуемся неравенством Гёльдера и формулой (12). Тогда

$$\int\limits_{T/2}^{3T} \left| \sum_{n>N} \frac{A_k(n)}{n^{5/4+it}} \right|^{2/v} dt \ll T N^{-\frac{3}{2v}+\frac{3\varepsilon}{2}}\,.$$

Пусть выполняется неравенство $\varepsilon < (6v)^{-1}$. Подставляя последнюю оценку в формулу (11), получаем утверждение леммы. ■

Лемма 7. *Пусть k – рациональное число и $c_k > 0$. Тогда*

$$\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^{-k^2} \ll \sum_{n\le N} \frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}} \ll \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^{-k^2}$$

при

$$\frac{1}{2} + \frac{c_k}{\ln N} \le \sigma < 1\,.$$

Более того,

$$\log^{k^2} N \ll \sum_{n\le N} \frac{|d_k(n)|^2}{n} \ll \log^{k^2} N\,,$$

где $d_k(n)$ – коэффициенты Дирихле функции $F^k(\sigma+it)$, $F(\sigma+it) \in S$.

□ Выбирая $\sigma = \dfrac{1}{2} + \dfrac{c_k}{\ln N}$ и замечая, что

$$\frac{1}{n} \ll \frac{1}{n^{2\sigma}} \ll \frac{1}{n}\,,$$

мы видим, что второе утверждение леммы следует из первого.

Справедливо неравенство:

$$\sum_{n\le N}\frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}}\,. \tag{13}$$

Ряд, стоящий справа в последнем неравенстве, можно записать в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}}=S(2\sigma)+O(1)\,,$$

где

$$S(2\sigma)=\prod_p\left(1+\frac{l^2|a(p)|^2}{p^{2\sigma}}\right)\,,$$

произведение ведется по простым числам p.

Пусть $\mu(n)$ – функция Мебиуса. Следовательно,

$$\sum_{n\le N}\frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}}\ge\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|d_k(n)|^2\mu^2(n)}{n^{2\sigma}}\left(1-\left(\frac{n}{N}\right)^{\sigma-\frac{1}{2}}\right)=S(2\sigma)-N^{\frac{1}{2}-\sigma}S\left(\frac{1}{2}+\sigma\right)\,. \tag{14}$$

Преобразуем сумму $S(1+r)$, в которой число r принимает значения $2\sigma-1$ или $\sigma-\frac{1}{2}$. Для функции $\ln S(1+r)$ выполняется:

$$\ln S(1+r)=k^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(n)|a(n)|^2}{n^{1+r}}+O(1)\,,$$

где

$$\alpha(n)=\begin{cases}1, & \text{если } n \text{ – простое число,}\\ 0, & \text{если } n \text{ – составное число.}\end{cases}$$

Применим преобразование Абеля к сумме из правой части последнего равенства.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(n)|a(n)|^2}{n^{1+r}}=\frac{1}{e}\sum_{p\le e^{\frac{1}{r}}}\frac{|a(p)|^2}{p}+r\int\limits_1^{e^{\frac{1}{r}}}\sum_{p\le x}\frac{|a(p)|^2}{p}\frac{dx}{x^{r+1}}+r\int\limits_{e^{\frac{1}{r}}}^{\infty}\sum_{e^{\frac{1}{r}}<p\le x}\frac{|a(p)|^2}{p}\frac{dx}{x^{r+1}}\,.$$

Пусть для коэффициентов Дирихле функции $F(s)$ справедлива гипотеза Сельберга. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(n)|a(n)|^2}{n^{1+r}}=-\frac{1}{e}\ln r-\left(1-\frac{1}{e}\right)\ln r+\int\limits_0^{\infty}\frac{\ln y}{e^y}\,dy+O(1)\,.$$

Из определения гамма-функции следует

$$\gamma=-\Gamma'(1)=-\int\limits_0^{\infty}\frac{\ln y}{e^y}\,dy\,,$$

где γ – постоянная Эйлера. Таким образом,

$$\ln S(1+r) = -k^2 \ln r + O(1)\,.$$

Первое утверждение леммы сразу следует из неравенств (13) и (14). ■

Лемма 8. *Пусть $d_k(n)$ – коэффициенты функции $F^k(\sigma+it)$, $F(\sigma+it)\in S$, число k – рациональное, $T \geq T_0 > 0$, $T^{\frac{1}{16}} < N < T^{\frac{15}{16}}$, $c_k > 0$. Тогда выполняются соотношения:*

$$T\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)^{-k^2} T \ll L(\sigma) \ll T\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)^{-k^2}$$

при

$$\frac{1}{2}+\frac{c_k}{\ln N} \leq \sigma < 1\,.$$

Кроме того,

$$T\ln^{k^2} T \ll L(1/2) \ll T\ln^{k^2} T\,,$$

где

$$L(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{n\leq N}\frac{d_k(n)}{n^{\sigma+it}}\right|^2 w(t)dt, \tag{15}$$

и $w(t)$ определяется равенством (6).

□ Из определения функции $w(t)$ следует, что

$$L(\sigma) = \int\limits_{0}^{3T}\left|\sum_{n\leq N}\frac{d_k(n)}{n^{\sigma+it}}\right|^2 w(t)dt + O(1)\,. \tag{16}$$

Кроме того, $w(t) \gg t$ для каждого t и $w(t)\gg 1$ при $4T/3 \leq t \leq 5T/3$. Используя лемму 2 при $T^{\frac{1}{16}} < N < T^{\frac{15}{16}}$, имеем

$$\int\limits_{0}^{3T}\left|\sum_{n\leq N}\frac{d_k(n)}{n^{\sigma+it}}\right|^2 dt \ll T\sum_{n\leq N}\frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}}$$

и

$$\int\limits_{4T/3}^{5T/3}\left|\sum_{n\leq N}\frac{d_k(n)}{n^{\sigma+it}}\right|^2 dt \gg T\sum_{n\leq N}\frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}}\,.$$

Применим последние оценки и лемму 7 к формуле (16). В результате, получаем утверждение леммы. ■

3. Доказательство теоремы

I. Получение асимптотической формулы.

Пусть $k = \dfrac{u}{v}$, $u < v$ с натуральными числами v, u; $\dfrac{1}{2} + \dfrac{c \ln\ln T}{\ln T} \le \sigma < 1$, $c = \dfrac{2u}{3} + \dfrac{1}{2}$; $N = T^{9/10}$. Справедливо равенство:

$$\int_T^{2T} |F(\sigma+it)|^{2k} dt = \int_T^{2T} |S_N(\sigma+it)|^2 dt + O\left(\int_T^{2T} |g(\sigma+it)|^{2/v}\, dt \right), \tag{17}$$

где

$$g(\sigma+it) = F^u(\sigma+it) - S_N^v(\sigma+it)\,,$$

$$S_N(\sigma+it) = \sum_{n\le N} \frac{d_k(n)}{n^{\sigma+it}}\,.$$

Для оценки главного члена в (17) мы воспользуемся леммой 2, в результате чего, находим

$$\int_T^{2T} |S_N(\sigma+it)|^2 dt = T \sum_{n\le N} \frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}} + O\left(\sum_{n\le N} \frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma-1}} \right). \tag{18}$$

Остаток можно с помощью преобразования Абеля и леммы 7 записать следующим образом:

$$O\left(\sum_{n\le N} \frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma-1}} \right) = O\left(N (\ln N)^{k^2} \right).$$

Следовательно, неравенство (18) переписывается в виде

$$\int_T^{2T} |S_N(\sigma+it)|^2 dt = T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}} - T \sum_{n>N} \frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}} + O\left(N (\ln N)^{k^2} \right).$$

Далее, посредством преобразования Абеля и леммы 7, оценим вторую сумму, стоящую справа в последнем неравенстве

$$\sum_{n>N} \frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}} \ll (2\sigma-1) \int_N^{\infty} \left(\ln \frac{x}{N} \right)^{k^2} \frac{dx}{x^{2\sigma}} = (2\sigma-1)^{-k^2} N^{1-2\sigma} \Gamma\left(k^2+1\right).$$

В итоге, для главного члена формулы (17) справедливо соотношение

$$\int_T^{2T} |S_N(\sigma+it)|^2 dt = T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}} + O\left(N (\ln N)^{k^2} \right) + O\left(T N^{1-2\sigma} (2\sigma-1)^{-k^2} \right).$$

Нам осталось оценить остаточный член в (17). Рассмотрим два случая:

1. В первом случае выполняется:

$$\int_T^{2T} |g(\sigma+it)|^{2/v}\,dt \le \frac{T}{\ln\ln T}\,.$$

2. Во втором случае имеет место неравенство:

$$\int_T^{2T} |g(\sigma+it)|^{2/v}\,dt > \frac{T}{\ln\ln T}\,.$$

Воспользовавшись леммой 6 и последним неравенством, имеем

$$\int_T^{2T} |g(\sigma+it)|^{2/v}\,dt \ll N^{-\frac{5(\sigma-\sigma_0)}{3v}} \int_T^{2T} |g(\sigma_0+it)|^{2/v}\,dt\,,$$

где

$$\sigma_0 = \frac{\ln\ln T}{2\ln T}\,.$$

Из неравенства

$$\int_T^{2T} |g(\sigma_0+it)|^{2/v}\,dt \ll \int_T^{2T} |F(\sigma_0+it)|^{2k}dt + \int_T^{2T} |S_N(\sigma_0+it)|^2 dt$$

следует, что

$$\int_T^{2T} |g(\sigma+it)|^{2/v}\,dt \ll N^{-\frac{5(\sigma-\sigma_0)}{3v}} \left[\int_T^{2T} |F(\sigma_0+it)|^{2k}dt + \int_T^{2T} |S_N(\sigma_0+it)|^2 dt\right]. \qquad (19)$$

На основании неравенства Гельдера, имеет место

$$\int_T^{2T} |F(\sigma_0+it)|^{2k}dt \ll T^{1-k}\left(\int_T^{2T} |F(\sigma_0+it)|^2 dt\right)^k.$$

Далее из оценки второго момента при $\sigma_0 = \dfrac{\ln\ln T}{2\ln T}$ (лемма 4) получим

$$\int_T^{2T} |F(\sigma_0+it)|^{2k}dt \ll T\left(\frac{\ln T}{\ln\ln T}\right)^k.$$

Используя лемму 8 и последнее неравенство, соотношение (19) при $N = T^{9/10}$, $c \ge \frac{2}{3}u + \frac{1}{2}$ оценивается следующим образом:

$$\int_T^{2T} |g(\sigma+it)|^{2/v}\,dt \ll N^{-\frac{5(\sigma-\sigma_0)}{3v}}T\left(\frac{\ln T}{\ln\ln T}\right)^k \ll \frac{T}{(\ln\ln T)^k}\,.$$

Следовательно, в обоих случаях выполняется:

$$\int\limits_T^{2T} |g(\sigma+it)|^{2/v}\,dt \ll \frac{T}{(\ln\ln T)^k}\,.$$

Подставляя получившиеся соотношения для главного члена и остатка в (19) при $N = T^{9/10}$, имеем

$$\int\limits_T^{2T} |F(\sigma+it)|^{2k}dt = T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|d_k(n)|^2}{n^{2\sigma}} + O\left(T(\ln T)^{k^2-\frac{9c}{5}}\right) + O\left(\frac{T}{(\ln\ln T)^k}\right).$$

Положив $2^{-j}T$ вместо T и суммируя по $j = 1, 2, 3, \cdots$, мы получаем первое утверждение теоремы.

II. Получение нижней оценки $I(1/2, T)$.

Пусть $\sigma = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\eta}{\ln T}, \eta$ – положительная постоянная. Справедливы следующие неравенства

$$K\left(\frac{1}{2}\right) \ll J\left(\frac{1}{2}\right) + L\left(\frac{1}{2}\right)\,, \tag{20}$$

$$L(\sigma) \ll J(\sigma) + K(\sigma)\,, \tag{21}$$

где функции $K(\sigma)$, $L(\sigma)$, $J(\sigma)$ определяются формулами (7), (15) и (5) соответственно.

Рассмотрим два случая:

1. Пусть $K(1/2) \le T$. Тогда мы воспользуемся леммами 8 и 5 при $\sigma = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\eta}{\ln T}$ и неравенством (21). В результате, имеем

$$T(\ln T)^{k^2} \ll L\left(\frac{1}{2}\right) - K\left(\frac{1}{2}\right) \ll J\left(\frac{1}{2}\right).$$

Следовательно,

$$J\left(\frac{1}{2}\right) \gg T(\ln T)^{k^2}.$$

2. Пусть $K(\frac{1}{2}) > T$. Сначала мы применим лемму 6 при $N = T^{9/10}, \sigma_0 = 1/2, \sigma = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\eta}{\ln T}$ к неравенству (21):

$$L(\sigma) \ll J(\sigma) + K\left(\frac{1}{2}\right)T^{-\frac{3(\sigma-1/2)}{2v}}\,.$$

Далее, воспользуемся неравенством (20)

$$L(\sigma) \ll J(\sigma) + \left(J\left(\frac{1}{2}\right) + L\left(\frac{1}{2}\right)\right)e^{-\frac{3\eta}{2v}}\,.$$

Теперь применим к функции $J(\sigma)$ лемму 5 при $\sigma = 1/2 + \dfrac{\eta}{\ln T}$

$$L(\sigma) \ll e^{\eta}\left(J\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{3/2-\sigma} + e^{-\frac{3\eta}{2v}}\left(J\left(\frac{1}{2}\right) + L\left(\frac{1}{2}\right)\right). \tag{22}$$

Возможны два различных случая. В первом из них имеет место

$$L(\sigma) \ll e^{-\frac{3\eta}{2v}} L\left(\frac{1}{2}\right).$$

Тогда из леммы 8 видно, что

$$T(\ln T)^{k^2}\eta^{-k^2} \ll L(\sigma) \ll e^{-\frac{3\eta}{2v}} L\left(\frac{1}{2}\right) \ll T(\ln T)^{k^2} e^{-\frac{3\eta}{2v}}.$$

Последнее неравенство при больших η не выполняется.

Во втором случае выполняется

$$L(\sigma) \ll e^{\eta}\left(J\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{3/2-\sigma} + e^{-\frac{3\eta}{2v}} J\left(\frac{1}{2}\right).$$

Применим лемму 8 при $\sigma = 1/2 + \dfrac{\eta}{\ln T}, \eta \geq c_1$. Тогда

$$J\left(\frac{1}{2}\right) \gg T(\ln T)^{k^2}.$$

Таким образом, в обоих случаях

$$J\left(\frac{1}{2}\right) \gg T(\ln T)^{k^2}. \tag{23}$$

Для получения второго утверждения теоремы мы будем пользоваться оценкой (23). Из формулы (6) видно, что $w(t) \ll 1$ для всех $t \leq 0$ и $t \geq 3T$. Поэтому выполняется следующая цепочка неравенств:

$$T(\ln T)^{k^2} \ll J\left(\frac{1}{2}\right) \ll I_k\left(\frac{1}{2}, 3T\right).$$

Теорема доказана. ■

Литература

1. Титчмарш Е.К. Теория дзета-функции Римана / Е.К. Титчмарш. – М.: ИЛ, 1953.

2. Турганалиев Р.Т. Асимптотическая формула для средних значений дробной степени дзета-функции Римана / Т.Р. Турганалиев // Тр. МИАН СССР. – М.:Наука, 1981.

3. Heath-Brown D.R. Fractional moments of the Riemann zeta-function // J. London Math. Soc. – 1981. – 2,24. – P.65-78.

4. Джаббаров И.Ш. Дробные моменты ζ-функции // Математические заметки. – 1985. – 38,4.

5. Laurincikas A., Steuding J. On Fractional Power Moments of Zeta-Functions Associated with Certain Cusp Forms //Acta Appl. Math. – 2007. – P.25-39.

6. Selberg A. Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series // Proc. of the Amalfi Conf. on Anal. Number Theory. Univ. di Salerno. – 1992. – P.367-385.

7. Гриценко С.А. О нулях линейных комбинаций специального вида функций, связанных с рядами Дирихле из класса Сельберга // Тр.матем. ин-та им. В.А. Стеклова. – 1996. – 60,4.

8. Gabriel R.M. Some results concerning the integrals of moduli of regular functions along certain curves // J. London Math. Soc. – 1927. – 2. – P.112-117.

9. Ivic A. The Riemann zeta-function / A. Ivic. – N.Y.: John Wiley and Sons, 1985.

ON FRACTIONAL MOMENTS OF DIRICHLET'S SERIES OF THE SELBERG CLASS

D.B. Demidov

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: Demidovnext@yandex.ru

Abstract. It is obtained the asymptotic formula and the lower estimate on fractional moments of the Dirichlet series of the Selberg class.

Key words: Dirichlet's series, fractional moments.

УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

О ПРОДОЛЖЕНИИ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ПЕРИОДИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВАХ[†)]

Р.Н. Зимин

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: reshat85@mail.ru

Аннотация. Изучается задача о продолжении функций, заданных на периодических множествах, с сохранением их дифференциальных свойств.

Ключевые слова: продолжение функций, периодические множества, дифференциальные свойства

Введение

Пусть область $\overline{\Omega}$ (например единичный куб Y) из $\mathbb{R}^3$ получена периодическим повторением элементарной ячейки $\varepsilon\overline{Y}$, где $\varepsilon > 0$ малый параметр,

$$\overline{Y} = Y_f \cup Y_s \cup \gamma \cup \partial Y, \quad Y = (0,1)\times(0,1)\times(0,1), \quad \varepsilon Y = (0,\varepsilon)\times(0,\varepsilon)\times(0,\varepsilon),$$

где $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ граница между множествами Y_f и Y_s.

Посредством $\overline{\Omega}_f^{\varepsilon}$ обозначим периодическое повторение элементарной ячейки $\varepsilon\overline{Y}_f$, а через $\overline{\Omega}_s^{\varepsilon}$ – периодическое повторение $\varepsilon\overline{Y}_s$. Тогда

$$\Omega = \Omega_f^{\varepsilon} \cup \Omega_s^{\varepsilon} \cup \Gamma^{\varepsilon},$$

где $\Gamma^{\varepsilon} = \partial\Omega_f^{\varepsilon} \cap \partial\Omega_s^{\varepsilon}$ – периодическое повторение границы $\varepsilon\gamma$.

Целью настоящей работы является продолжение функций $\boldsymbol{u} \in \mathbb{W}_2^1(\Omega_f^{\varepsilon})$ из области Ω_f^{ε} в область Ω так, чтобы продолжение $\boldsymbol{v}$ удовлетворяло соотношениям

$$\int_{\Omega} |\boldsymbol{v}|^2 d\boldsymbol{x} \le C \int_{\Omega_f^{\varepsilon}} |\boldsymbol{u}|^2 d\boldsymbol{x}, \tag{1}$$

$$\int_{\Omega} |\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})|^2 d\boldsymbol{x} \le C \int_{\Omega_f^{\varepsilon}} |\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})|^2 d\boldsymbol{x}, \tag{2}$$

где постоянная C не зависит от ε.

При этом рассмотрим только две простейшие геометрии элементарной ячейки Y_s. А именно, в первом случае –

Геомерия А.

Область Y_s полностью окружена областью Y_f (см. рис. 1), то есть $\overline{Y}_s \cap \partial Y = \varnothing$ и для такой геометрии выполнено следующее условие на границе γ:

$$\int_{\gamma} \boldsymbol{u} \, d\sigma = 0. \tag{3}$$

[†]Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"на 2009-2013 годы (госконтракт ќ 02.740.11.0613).

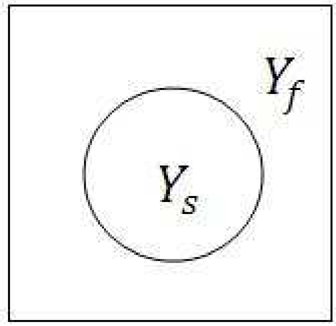

Рис. 1. Элементарная ячейка геометрии $\boldsymbol{A}$.

Во втором случае –

Геометрия B.

Область Y_s есть объединение трех цилиндров с осями, параллельными координатным осям и пересекающимися в центре куба Y (см. рис. 2).

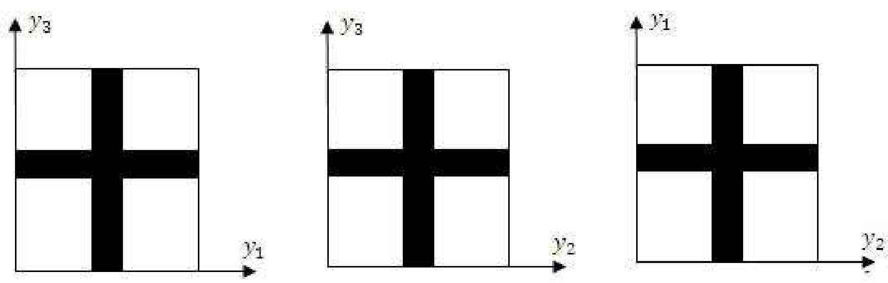

Рис. 2. Сечение элементарной ячейки геометрии $\boldsymbol{B}$
плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Для **геомерии A** в работе построено также продолжение соленоидальными функциями, т.е. для функций $\boldsymbol{u} \in \mathbb{W}_2^1(\Omega_f^\varepsilon)$, $\quad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ продолжение $\boldsymbol{v}$, помимо соотношений (1) и (2), удовлетворяет следующему условию:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0\,. \tag{4}$$

Построение этого продолжения основано на простой идее, предложенной C.Conca в [1].

1. Стандартное продолжение для геометрии A

Пусть

$$\overline{\Omega} = \bigcup_k \overline{\Omega}^{(k)},$$

где $\overline{\Omega}^{(k)}$ – параллельный перенос ячейки $\varepsilon\overline{Y}$,

$$\boldsymbol{u}^{(k)}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{u}(\varepsilon\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}_k)\,,$$

где $\boldsymbol{x}_k$ – вершина куба $\Omega^{(k)}$, в которую переходит начало координат при отображении $Y \to \Omega^{(k)}$, заданного формулой

$$\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k}{\varepsilon}\,. \tag{5}$$

Следуя [1], строим продолжение функции $\boldsymbol{u}$ в каждой области $\Omega^{(k)}$. А именно, пусть $\boldsymbol{v}^{(k)}(\boldsymbol{y})$ есть продолжение из Y_f в Y такое, что

$$\int_Y |\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^{(k)})|^2 d\boldsymbol{y} \le C\int_{Y_f} |\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^{(k)})|^2 d\boldsymbol{y}\,. \tag{6}$$

Тогда, полагая $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}^{(k)}((\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k)/\varepsilon)$, имеем

$$\int_{\Omega^{(k)}} |\boldsymbol{v}^{(k)}|^2 d\boldsymbol{x} \le C\int_{\Omega_f^{(k)}} |\boldsymbol{u}^{(k)}|^2 d\boldsymbol{x}\,, \tag{7}$$

$$\int_{\Omega^{(k)}} |\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^{(k)})|^2 d\boldsymbol{x} \le C\int_{\Omega_f^{(k)}} |\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^{(k)})|^2 d\boldsymbol{x}\,, \tag{8}$$

что, после суммирования по всем k, даёт (1) и (2). В формулах (7) и (8) $\Omega_f^{(k)}$ есть образ области Y_f при отображении (5).

Итак, пусть $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) \in \mathbb{W}_2^1(Y_f) = \boldsymbol{H}$ (для простоты изложения опустим индекс "k"). В гильбертовом пространстве рассмотрим замкнутое подпространство $\boldsymbol{H}_0$,

$$\boldsymbol{H}_0 = \{\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{H}_0 \;\mid\; \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}_0) = 0\}\,.$$

Из [1] известно, что это подпространство составляют все линейные функции вида $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{b}$.

Посредством $\boldsymbol{H}_1$ обозначим ортогональное дополнение в $\boldsymbol{H}$ к $\boldsymbol{H}_0$ такое, что

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 \oplus \boldsymbol{H}_1$$

и

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{y})\,.$$

Функция $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{y})$, являясь линейной, естественным образом продолжается в Y. Поэтому ищем продолжение $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})$ в виде

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{y})\,,$$

где $\boldsymbol{v}_1$ – какое-то продолжение из Y_f в Y, сохраняющее класс. Такое продолжение всегда существует и

$$\int_Y \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}_1) : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}_1) d\boldsymbol{y} \le C\int_{Y_f} \left[|\boldsymbol{u}_1|^2 + |\nabla \boldsymbol{u}_1|^2\right] d\boldsymbol{y} \le$$

$$\leq C\int_{Y_f} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}_1):\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}_1)d\boldsymbol{y} \equiv C\int_{Y_f} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}):\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})d\boldsymbol{y}\,. \tag{9}$$

Первое неравенство в (9) – свойство выбранного продолжения, сохраняющее дифференциальные свойства функций (класс), а второе – следствие выбора подпространства $\boldsymbol{H}_1$. Действительно, если $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}_1)=0$, то $\boldsymbol{u}_1\in\boldsymbol{H}_0$, что, в силу принадлежности $\boldsymbol{u}_1\in\boldsymbol{H}_1$, влечёт $\boldsymbol{u}_1=0$, то есть выражение

$$\int_{Y_f} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}_1):\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}_1)d\boldsymbol{y}$$

является нормой в $\boldsymbol{H}$. Поскольку $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}_1)$, то (9) эквивалентно (6).

2. Стандартное продолжение для геометрии B

В первую очередь построим продолжение функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ в цилиндры $G^{(m)}\subset\Omega_s^{\varepsilon}$ такие, что половина цилидра находится в подобласти $\Omega^{(k)}$, а вторая — в примыкающей к ней подобласти $\Omega^{(n)}$. Для этого выберем параллелепипед $\Pi^{(m)}$, содержащий $G^{(m)}$ и лежащий полностью (за исключением $G^{(m)}$) в Ω_f^{ε} (см. рис. 3).

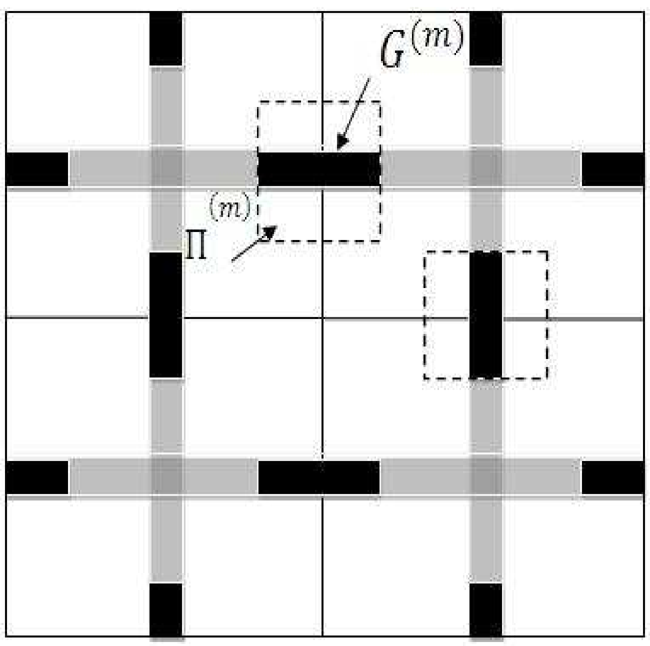

Рис. 3.

Для продолжения в $G^{(m)}$ из $\Pi^{(m)}$ воспользуемся описанной выше процедурой. После продолжения $\boldsymbol{u}$ в области $G^{(m)}$ получаем геометрию **A**, в которой продолжение также описано.

3. Продолжение соленоидальными функциями для геометрии A

В случае соленоидального продолжения повторяем процедуру стандартного продолжения до момента продолжения функции $\boldsymbol{u}^{(k)}(\boldsymbol{y})$ из области Y_f в область Y_s. В силу предположения (3)

$$\int_\gamma \boldsymbol{u}^{(k)}(\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma=0\,, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{n}$ – вектор единичной нормали к γ.

Поскольку $\boldsymbol{u}_0^{(k)}(\boldsymbol{y})$ есть решение уравнения $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}_0^{(k)})=0$ то, в частности,

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0^{(k)}=0 \tag{11}$$

и, в силу (10) и (11),

$$\int_\gamma \boldsymbol{u}_1^{(k)}(\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma=0\,. \tag{12}$$

Обозначим $\alpha(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{u}_1^{(k)}(\boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{y}\in\gamma$. Нам необходимо построить соленоидальное векторное поле $\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{y})\in\mathbb{W}_2^1(Y_s)$, совпадающее с $\alpha(\boldsymbol{y})$ на границе γ. Ищем $\boldsymbol{v}_1$ в виде

$$\boldsymbol{v}_1=\mathrm{rot}\ \boldsymbol{c}+\nabla\varphi\,.$$

Поскольку $\nabla\cdot(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{c})=0\ \forall\boldsymbol{c}$, то соленоидальность $\boldsymbol{v}_1$ влечёт

$$\triangle\varphi=0,\ \boldsymbol{y}\in Y_s\,. \tag{13}$$

В качестве граничного условия выберем условие

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{n}}=\alpha\cdot\boldsymbol{n}\,,\ \text{при } \boldsymbol{y}\in\gamma \tag{14}$$

и выделим единственное решение положив

$$\int_{Y_s}\varphi d\boldsymbol{y}=0\,.$$

Условие (12) является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (13), (14). При этом из принадлежности $\alpha\cdot\boldsymbol{n}\in\mathbb{W}_2^{1/2}(\gamma)$ (функция α есть след на γ функции $\boldsymbol{u}_1^{(k)}\in\mathbb{W}_2^1(Y_f)$, $\boldsymbol{n}$ – гладкая функция) следует, что $\varphi\in\mathbb{W}_2^2(Y_s)$ [2].

Таким образом, задача свелась к построению векторного поля $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{y})$ по заданному значению

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{c}=\alpha-\alpha\cdot\boldsymbol{n} \tag{15}$$

на границе γ. С помощью разбиения единицы сведём её к локальной процедуре. А именно, пусть $\{\psi_m(\boldsymbol{y})\}_{m=1}^N$ – разбиение единицы окрестности границы γ такое, что при всех m в окрестности части границы γ_m где $\psi_m(\boldsymbol{y})>0$ существует ортогональная криволинейная система координат $\{z_1,z_2,z_3\}$, у которой направление z_3 на γ_m совпадает с направлением нормали $\boldsymbol{n}$ к границе. Тогда в этих координатах $\boldsymbol{c}^m=\psi_m\cdot\boldsymbol{c}=(\widetilde{c}_1^{\,m},\widetilde{c}_2^{\,m},\widetilde{c}_3^{\,m})\,,\ \psi_m\cdot(\alpha-\alpha\cdot\boldsymbol{n})=(\widetilde{\alpha}_1^m,\widetilde{\alpha}_2^m,0)$,

$$\begin{cases} (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{c})_1 = \partial\widetilde{c}_2^{(m)}/\partial z_3 - \partial\widetilde{c}_3^{(m)}/\partial z_2 = \widetilde{\alpha}_1^{(m)} \\ (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{c})_2 = \partial\widetilde{c}_3^{(m)}/\partial z_1 - \partial\widetilde{c}_1^{(m)}/\partial z_3 = \widetilde{\alpha}_2^{(m)} \\ (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{c})_3 = \partial\widetilde{c}_1^{(m)}/\partial z_2 - \partial\widetilde{c}_2^{(m)}/\partial z_1 = 0\,. \end{cases} \tag{16}$$

Положим

$$\begin{gathered} \widetilde{c}_1^{(m)} = \widetilde{c}_2^{(m)} = \widetilde{c}_3^{(m)} \qquad \text{при } z_3 = 0 \\ \partial\widetilde{c}_2^{(m)}/\partial z_3 = \widetilde{\alpha}_1^{(m)}, \quad \partial\widetilde{c}_1^{(m)}/\partial z_3 = -\widetilde{\alpha}_2^{(m)}\,. \end{gathered} \tag{17}$$

В итоге, построение векторного поля $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{y})$ свелось к задаче о продолжении функции $u(\boldsymbol{z}) \in \mathbb{W}_2^2(\mathbb{R}_+^3)$ в полупространство $\{z_3 > 0\} = \mathbb{R}_+^3$, принимающей на границе $z_3 = 0$ краевые условия

$$u = 0, \ \frac{\partial u}{\partial z_3} = \beta(\boldsymbol{z}') \quad \text{при} \quad z_3 = 0, \tag{18}$$

(здесь $\boldsymbol{z}' = (z_1, z_2)$) с финитной функцией $\beta \in \mathbb{W}_2^{1/2}(\mathbb{R}^2)$.

Пусть $v^0(\boldsymbol{z}) \in \mathbb{W}_2^2(\mathbb{R}_+^3)$ – какое-либо продолжение функции $\beta(\boldsymbol{z})$. Согласно [1] такое продолжение всегда существует (при этом функцию v^0 можно считать финитной). Далее рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{gathered} \triangle v = 0, \ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}_+^3 \\ v(\boldsymbol{z}', 0) = v^0(\boldsymbol{z})\,, \end{gathered} \tag{19}$$

эквивалентную интегральному тождеству

$$\int_{\mathbb{R}_+^3} \nabla v \cdot \nabla\varphi \, d\boldsymbol{z} = 0, \quad v - v^0 \in \dot{\mathbb{W}}_2^1(\mathbb{R}_+^3)\,.$$

Решение этой задачи существует, единственно и

$$\|v\|_{\mathbb{W}_2^1(\mathbb{R}_+^3)} \le \|v^0\|_{\mathbb{W}_2^1(\mathbb{R}_+^3)} \le C\|\beta\|_{\mathbb{W}_2^{1/2}(\mathbb{R}^2)}\,. \tag{20}$$

При этом решение дается интегралом Пуассона

$$v(\boldsymbol{z}) = \frac{z_3}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\beta(\boldsymbol{y}')\ d\boldsymbol{y}'}{\left[|\boldsymbol{z}' - \boldsymbol{y}'|^2 + z_3^2\right]^{3/2}}\,. \tag{21}$$

Покажем, что искомым продолжением $u(\boldsymbol{z})$ будет функция

$$u(\boldsymbol{z}) = z_3 v(\boldsymbol{z}) \tag{22}$$

и она есть обобщённое решение уравнения Пуасона

$$\triangle u = 2\frac{\partial v(\boldsymbol{z})}{\partial z_3} \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}_+^3))\,, \tag{23}$$

удовлетворяющее краевому условию

$$u(\boldsymbol{z}',0)=0. \tag{24}$$

В самом деле, из цепочки равенств

$$\nabla u\cdot\nabla\varphi=\nabla(z_3v)\cdot\nabla\varphi=\boldsymbol{e}_3\cdot\nabla\varphi v+z_3\nabla v\cdot\nabla\varphi=$$

$$=-\boldsymbol{e}_3\cdot\nabla v\varphi+\nabla v\cdot\nabla(z_3\varphi)-\boldsymbol{e}_3\cdot\nabla v\varphi=\nabla v\cdot\nabla(z_3\varphi)-2\boldsymbol{e}_3\cdot\nabla v\varphi$$

следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^3_+}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,d\boldsymbol{z}=-2\int_{\mathbb{R}^3_+}\frac{\partial v}{\partial z_3}\varphi\,d\boldsymbol{z}+\int_{\mathbb{R}^3_+}\nabla v\cdot\nabla(z_3\varphi)\,d\boldsymbol{z}=-2\int_{\mathbb{R}^3_+}\frac{\partial v}{\partial z_3}\varphi\,d\boldsymbol{z}\,,$$

поскольку $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3_+}\nabla v\cdot\nabla(z_3\varphi)\,d\boldsymbol{z}=0$ для всех $\varphi\in\dot{\mathbb{W}}^1_2(\mathbb{R}^3_+)$.

В силу единственности решения задачи (23), (24) и результатов о гладкости [2], $u\in\dot{\mathbb{W}}^2_2(\mathbb{R}^3_+)$. Нам осталось показать, что

$$\frac{\partial u}{\partial z_3}=\beta(\boldsymbol{z}')\quad\text{при}\quad z_3=0\,.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z_3}=v+z_3\frac{\partial v}{\partial z_3}\to\beta\quad\text{при}\quad z_3\to 0$$

если мы покажем, что

$$z_3\frac{\partial v}{\partial z_3}\to 0\quad\text{при}\quad z_3\to 0\,.$$

Имеем,

$$\frac{\partial v}{\partial z_3}=-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\partial^2}{\partial z_3^2}\left(\frac{1}{r}\right)\beta(\boldsymbol{y}')\,d\boldsymbol{y}'=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\triangle'\left(\frac{1}{r}\right)\beta(\boldsymbol{y}')\,d\boldsymbol{y}'\,,$$

где $r^2=|\boldsymbol{z}'-\boldsymbol{y}'|^2+z_3^2,\ \triangle'=\partial^2/\partial y_1^2+\partial^2/\partial y_2^2$. Поскольку

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\triangle'\left(\frac{1}{r}\right)\beta(\boldsymbol{z}')\,d\boldsymbol{y}'=0\,,$$

то

$$\frac{\partial v}{\partial z_3}=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\triangle'\left(\frac{1}{r}\right)[\beta(\boldsymbol{y}')-\beta(\boldsymbol{z}')]\,d\boldsymbol{y}'\,.$$

Далее воспользуемся неравенством Гёльдера с весом $\overline{r}^{\,3/2}$, $\overline{r}^2=(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}')$. Имеем

$$\left|\frac{\partial v}{\partial z_3}\right|^2\le\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}^2}\overline{r}^{\,3}\left|\triangle'\left(\frac{1}{r}\right)\right|^2d\boldsymbol{y}'\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\beta(\boldsymbol{y}')-\beta(\boldsymbol{z}')|^2}{\overline{r}^{\,3}}d\boldsymbol{y}'$$

или

$$\left|\frac{\partial v}{\partial z_3}\right|^2\le\frac{1}{4\pi^2}\mathcal{I}^2\|\beta\|^2_{\mathbb{W}_2^{1/2}(\mathbb{R}^2)}\,,$$

где

$$\mathcal{J}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{z}'|^3 \left| \frac{3|\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{z}'|^2}{(|\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{z}'|^2 + z_3^2)^{5/2}} - \frac{2}{(|\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{z}'|^2 + z_3^2)^{3/2}} \right|^2 d\boldsymbol{y}' =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} |\boldsymbol{y}'|^3 \left| \frac{3|\boldsymbol{y}'|^2}{(|\boldsymbol{y}'|^2 + z_3^2)^{5/2}} - \frac{2}{(|\boldsymbol{y}'|^2 + z_3^2)^{3/2}} \right|^2 d\boldsymbol{y}' =$$
$$= \frac{1}{z_3} \int_{\mathbb{R}^2} |\boldsymbol{y}'|^3 \left| \frac{3|\boldsymbol{y}'|^2}{(|\boldsymbol{y}'|^2 + 1)^{5/2}} - \frac{2}{(|\boldsymbol{y}'|^2 + 1)^{3/2}} \right|^2 d\boldsymbol{y}' = \frac{\mathcal{J}_0^2}{z_3}.$$

Следовательно,

$$z_3^2 \left| \frac{\partial v}{\partial z_3} \right|^2 \leq z_3 \mathcal{J}_0^2 \|\beta\|^2_{\mathbb{W}_2^{1/2}(\mathbb{R}^2)} \to 0$$

при $z_3 \to 0$.

Таким образом, с помощью задачи (18) мы построили решение задачи (17). Ясно, что вектор-функция

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{y}) = \sum_m \boldsymbol{c}^{(m)}(\boldsymbol{z})\psi_{(m)}(\boldsymbol{z}) \in \mathbb{W}_2^2(Y_s),$$

где $\psi_{(m)}(\boldsymbol{z}) = 0$ вблизи $z_3 = 0$ и исчезает при $z_3 \geq \delta > 0$ (δ – достаточно мало), является искомым векторным полем.

Литература

1. Conca C., Díaz J.I., Liñán A., Timofte C. Homogenization in chemical reactive flows // Electronic Journal of Differential Equations. – 2004. – 40. – P.1-22.

2. Ладыженская О.А., Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973.

INDICATOR RANDOM PROCESS AND SEPARABLE RANDOM CLOSED SETS

R. N. Zimin

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: reshat85@mail.ru

Abstract. The extension of functions on the periodic structures which preserves their differential properties is studied.

Key words: extension of functions, periodic sets, differential properties

УДК 517.9

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ДВУМЕРНЫХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ОБЛАСТЯХ С КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Л.А. Ковалева, А.П. Солдатов

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: kovaleva_l@bsu.edu.ru

Аннотация. Описывается подход к исследованию краевых задач на двумерных стратифицированных множествах с кусочно-гладкой границей для гармонических функций. Подход основан на редукции изучаемых задач к нелокальным краевым задачам теории функций в семействе плоских областей.

Ключевые слова: задача Дирихле на стратифицированном множестве, задача Неймана на стратифицированном множестве, обобщенная задача Римана-Гильберта.

По определению, гладкой дугой Γ мы называем образ непрерывно-дифференцируемого отображения $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, которое взаимно-однозначно и его производная $\gamma^{'}(s) \neq 0,\ \ 0 \leq s \leq 1$. Это отображение называется также (гладкой) параметризацией. Оно наделяет дугу Γ ориентацией. Точки $\gamma(0), \gamma(1)$ называются концами дуги Γ. Точки, отличные от $\gamma(0), \gamma(1)$, составляют её внутренность. Класс таких дуг обозначим C^1, запись $\Gamma \in C^{1,\mu}$ означает, что Γ допускает параметризацию класса $C^{1,\mu}[0,1]$. Объединение Γ конечного числа гладких дуг $\Gamma_1, .., \Gamma_m$, которые могут попарно пересекаться лишь по своим концам, мы называем кусочно-гладкой кривой. Конечное множество F, составленное из концов этих дуг, мы называем множеством угловых точек. Точки множества $\dot{\Gamma} = \Gamma \setminus F$ являются внутренними точками данной кривой. Кусочно-гладкая кривая, составленная из совокупности дуг $\Gamma_1, .., \Gamma_m$, называется составной частью кривой Γ.

Кусочно-гладкая кривая, все связные компоненты которой гомеоморфны окружности, естественно называть (кусочно-гладким) контуром. Ниже, удобно под кусочно-гладкой областью понимать конечную плоскую область $D \subseteq \mathbb{C}$, ограниченную кусочно-гладким контуром ∂D. По отношению к этой области дуги, составляющие кривой Γ, являются сторонами, а узлы контура – вершинами.

Пусть задано непрерывно дифференцируемое взаимно-однозначное отображение α замкнутой кусочно-гладкой области D в $\mathbb{R}^3$, частные производные $\partial\alpha/\partial x$, $\partial\alpha/\partial y$ которого, как векторы, линейно независимы в каждой точке $z = x + iy \in \overline{D}$. Тогда, по определению, образ $G = \alpha(D)$ области D представляет собой гладкую поверхность, ограниченную кусочно-гладким контуром $\partial G = \alpha(\partial D)$. Эту гладкую поверхность мы называем листом с кусочно-гладким краем ∂G, или, кратко, кусочно-гладким листом. Соответственно, α есть гладкая параметризация листа G.

По определению, класс $C^1(G)$ непрерывно дифференцируемых функций φ на G определяется условием $\varphi \circ \alpha \in C^1(D)$. Для такой функции определены производные $\partial\varphi/\partial e$ вдоль единичных касательных векторов e к поверхности G. Именно, по определению

$$\frac{\partial\varphi}{\partial e}(y_0) = \lim \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{|\ y - y_0\ |} \ \text{ при } \ y \in G, \quad y \to y_0, \quad \frac{y - y_0}{|\ y - y_0\ |} \to e\,. \tag{1}$$

Ясно, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(-e)} = -\frac{\partial\varphi}{\partial e}\,. \tag{2}$$

Если заданная на отрезке $I \subseteq \mathbb{R}$ вектор-функция γ со значениями в G непрерывно дифференцируема и $\gamma'(t_0)/\mid\gamma'(t_0)\mid = e$, то, очевидно,

$$(\varphi\circ\gamma)'(t) = \frac{\partial\varphi}{\partial e}[\gamma(t)]|\gamma'(t)|\,. \tag{3}$$

Если дуга L входит в состав контура ∂G и функция $\varphi \in C^1(G\cup\dot{L})$ (т.е. $\varphi\circ\alpha \in C^1(D\cup\dot{\Gamma})$, где $\Gamma = \alpha^{-1}(L)$), то определение (1) сохраняет свою силу и для точек $y \in \dot{L}$ и касательных векторов e, направленных в сторону G. В частности, имеет смысл нормальная производная $\partial\varphi/\partial n$, где касательный к G вектор n есть единичная внутренняя нормаль к L во внутренней точке y дуги.

Пусть задано конечное число $G_1,..,G_n$ кусочно-гладких листов, замыкания которых могут попарно пересекаться лишь по своим вершинам или сторонам. Более точно, если $a \in \overline{G}_k\cap\overline{G}_r$, то либо a является вершиной каждого из краёв $\partial\overline{G}_k$ и $\partial\overline{G}_r$, либо внутренней точкой, причём стороны $L_i \subseteq \partial\overline{G}_k$ и $L_j \subseteq \partial\overline{G}_r$, содержащие эту точку, совпадают. Очевидно, объединение $L = \bigcup_k \partial\overline{G}_k$ представляет собой кусочно-гладкую кривую, которая содержит контура $\partial\overline{G}_k$ в качестве своих составных частей. Дуги $L_1,\dots,L_l$, составляющие кривую L, назовём сторонами, если они принадлежат краю только одного листа, и рёбрами в противном случае. К каждому ребру L_k сходится несколько листов G_r, их номера образуют некоторое подмножество из $1,..,n$, которое обозначим Δ_k. Пусть m_k означает число элементов этого множества, так что дуга L_k является стороной при $m_k = 1$ и ребром при $m_k > 1$.

Объединение G листов $G_1,..,G_n$ и внутренностей всех ребер назовём стратифицированной областью. Очевидно, её замыкание $\overline{G}$ совпадает с $\overline{G}_1\cup...\cup\overline{G}_n$, а дополнение $\partial G = \overline{G}\setminus G$ состоит из кусочно-гладкой кривой $\partial^1 G$, составленной из сторон, и не пересекающегося с ней конечного множества $\partial^0 G$ узлов кривой Γ, к которым сходятся только ребра. Множество узлов F кривой Γ распадается на подмножество F^1, состоящее из узлов $\partial^1 G$, и $\partial^0 F$.

Рассмотрим гладкие параметризации $\alpha_r : \overline{D}_r \to \overline{G}_r$ листов G_r, $1 \le r \le n$. Напомним, что D_r является кусочно-гладкой областью, т.е. конечной областью, ограниченной кусочно-гладким контуром ∂D_r. Каждому ребру L_k отвечает семейство дуг $\Gamma_{kr} \subseteq \partial D_r$, $r \in \Delta_k$, которые при отображении α_r переходят в L_k. Таким образом, точке $y \in \dot{L}_k$ отвечают точки $z_r = \alpha_r^{-1} \in \dot{\Gamma}_{kr}$. Можно сказать, что ребра L_k получаются "склеиванием" сторон $\Gamma_{kr} \subseteq \partial D_r$ по точкам y_r. С другой стороны, каждой стороне $L_k \subseteq \partial^1 G$ отвечает ровно один лист G_r, сходящийся к этой стороне, и соответственно сторона $\Gamma_{kr} \subseteq \partial D_r$, которая переходит в L_k при отображении α_r. В этом случае множество Δ_k состоит из одного элемента r.

Таким образом, с топологической точки зрения, стратифицированное множество G можно получить из семейства кусочно-гладких областей $D_1,..,D_n \subseteq \mathbb{C}$, никак не связанных между собой, путем "склеивания" некоторых дуг, составляющих контура ∂D_r. В результате, получаются ребра стратифицированной области. Те дуги из контуров ∂D_r, которые не участвуют в склеивании, образуют стороны G. Заметим, что аналогичный способ часто используется [1] при описании римановых поверхностей.

В дальнейшем на параметризации α_r во внутренних граничных точках контуров ∂D_r накладываем дополнительное условие

$$\frac{\partial\alpha_r}{\partial n}\perp\frac{\partial\alpha_r}{\partial e}, \qquad \left|\frac{\partial\alpha_r}{\partial n}\right| = \left|\frac{\partial\alpha_r}{\partial e}\right|, \tag{4}$$

где единичные векторы n и e, соответственно, ортогональны и касательны к ∂D_r в рассматриваемых точках. В силу (2) это условие не зависит от выбора (одного из двух возможных) направлений векторов n и e.

Непрерывную функцию $u \in C(G)$ назовём гармонической в стратифицированной области G, если для каждого $1 \le r \le n$ функция $u_r = u \circ \alpha_r$ гармонична в области D_r. Кроме того, для любого $1 \le k \le l$ сужение u на лист G_r, $r \in \Delta_k$, принадлежит классу $C^1(G_r \cup \dot{L}_k)$, и выполнено так называемое контактное условие

$$\sum_{r\in\Delta_k} \frac{\partial u}{\partial n_r}(y) = 0, \quad y \in \dot{L}_k\,, \tag{5}$$

для её нормальных производных вдоль листов G_k, $r \in \Delta_k$. Здесь, единичный вектор n_r касательный к G_k в точке y, ортогонален L_k и направлен в сторону G_k.

На границе $\partial^1 G$ для функции u можно ставить различные краевые условия аналогичные случаю плоских областей. Например, можно рассмотреть задачу Дирихле

$$u^+ = f\,, \tag{6}$$

где символом "+" здесь и ниже мы указываем на граничные значения функции $u \in C(\overline{G} \setminus F)$ на $\partial^1 G$, и задачу Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial n}^+ = g\,, \tag{7}$$

для нормальной производной функции u на $\partial^1 G$. Более точно, каждая дуга $L_k \subseteq \partial^1 G$ является стороной единственного листа G_r, функция $u \in C^1(G_r \cup \dot{L}_k)$ и её производная $\partial u/\partial n$ по направлению внутренней нормали $n(y)$ к Γ_1 в точке $y \in \dot{L}_k$ принимает значение $g(y)$.

Возможны и другие типы краевых условий, например, смешанные краевые условия. На поведение функции u в окрестности изолированных особых точек $\tau \in \partial^0 G$ накладываются дополнительные условия. Например, можно поставить вопрос, если u ограничена в окрестности точки τ, то будет ли в этих условиях существовать предел $\lim\limits_{z\to\tau} u(t)$?

Контактное условие (5) можно переписать по отношению к функции $u_r = u \circ \alpha_r$. Пусть точка y лежит внутри ребра L_k и $z_r = \alpha_r^{-1}(y) \in \dot{\Gamma}_{kr} \subseteq \partial D_r$, $r \in \Delta_k$. В силу (4), нормальное направление к ∂D_r в точке z_r при отображении α_r перейдет в нормальное направление к ребру L_k в точке y вдоль касательной плоскости к G_r. Поэтому, по определению (1),

$$\frac{\partial u_r}{\partial n}(z_r) = \frac{\partial u}{\partial n_r}(y)\left|\frac{\partial\alpha_r}{\partial n}(z_r)\right|\,.$$

Подставляя это выражение в (5) и пользуясь вторым условием (4), получим:

$$\sum_{r\in\Delta_k}\left|\frac{\partial\alpha_r}{\partial e}(z_r)\right|^{-1}\frac{\partial u_r}{\partial n}(z_r)=0\,. \tag{8}$$

Заметим, что непрерывность функции u в точке y означает, что предельные значения u_r^+ в точках z_r совпадают:

$$u_r^+(z_r)=u(y),\quad r\in\Delta_k,. \tag{9}$$

Обратимся к семейству областей D_r, $1\le r\le n$. Дуги, составляющие их границы, занумеруем единым образом $\Gamma_1,..,\Gamma_m$. Те из них, которые составляют контур ∂D_k, описываем с помощью подмножества $O_k\subseteq\{1,..,m\}$. Другими словами, множество $\{1,..,m\}$ разбито на попарно непересекающиеся подмножества $O_1,..,O_n$ и дуги Γ_j, $j\in O_r$, составляют контур ∂D_r.

Напомним, что дуга L_k служит стороной листов G_r, $r\in\Delta_k$. Дуге $\Gamma_{kr}=\alpha_r^{-1}(L_k)\subseteq\partial D_r$ отвечает в единой нумерации некоторый номер $j=j(r)\in O_r$. Такого рода номера образуют подмножество $I_k\subseteq\{1,..,m\}$, так что

$$\alpha_r(\Gamma_{j(r)})=L_k,\quad r\in\Delta_k\,. \tag{10}$$

В результате, получаем разбиение множества $\{1,\dots,m\}$ на попарно непересекающиеся подмножества $I_1,..I_l$, отвечающие дугам $L_1,..,L_l$, причём отображение $r\to j(r)$ осуществляет биекцию Δ_k на I_k. Конечно, в случае, когда рассматривается одна сторона L_k, множество I_k состоит из одного элемента.

Граничные значения u_r^+ на ∂D_r удобно описывать единым образом с помощью гладких параметризаций $\gamma_j:[0,1]\to\Gamma_j$ дуг Γ_j. Положим

$$u_{\gamma,j}^+=u_r^+\circ\gamma_j,\quad j\in O_r\,. \tag{11}$$

Таким образом, семейство функций $u_{\gamma,j}^+$, $j\in O_r$, описывает граничное значение u_r^+, снесённое параметризациями на отрезок $[0,1]$ действительной оси. Параметризации γ_j, $j\in I_k$, дуг Γ_j, отвечающих L_k, удобно выбрать специальным образом. С этой целью зададим параметризацию $l_k:[0,1]\to L_k$ и γ_j, $j\in I_k$, подчиним условию

$$\gamma_{j(r)}=\alpha_r\circ l_k,\quad r\in\Delta_k\,, \tag{12}$$

где $j=j(r)$ – отображение, фигурирующее в (10). При таком выборе точки y и z_r, $r\in\Delta_k$, фигурирующие в (5), описываются как значения $l_k(t)$ и $\gamma_{j(r)}(t)$, $r\in\Delta_k$ в некоторой точке t интервала (0,1). В силу (3), (12) можем записать:

$$\left|\frac{\partial\alpha_r}{\partial e}\right||\gamma'_{j(r)}|=|l'_k|\,.$$

В таком случае соотношение (8) переписывается в форме

$$\sum_{r\in\Delta_k}|\gamma'_{j(r)}(t)|\frac{\partial u_r}{\partial n}[\gamma_{j(r)}(t)]=0\,,\quad 0<t<1\,.$$

Напомним, что отображение $r \to j(r)$ осуществляет взаимно-однозначное соответствие между Δ_k и I_k. Следовательно, в обозначениях (11), применённых к нормальным производным $\partial u/\partial n$, предыдущее равенство переходит в

$$\sum_{j\in I_k} |\gamma_j'(t)| \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^+_{\gamma,j}(t) = 0\,, \quad 0 < t < 1\,. \tag{13}$$

Точно также условие непрерывности (9) принимает вид

$$u^+_{\gamma,j}(t) = u[l_k(t)]\,, \qquad j \in I_k, \quad 0 < t < 1. \tag{14}$$

Рассмотрим ориентацию дуг Γ_j, определяемых параметризацией γ. По отношению к области D_r ориентация дуги Γ_j, $j \in O_r$ может быть как положительна, когда область D_r остается слева, так и отрицательна. Это обстоятельство описывается сигнатурой ориентации σ_j, принимающей значения, соответственно, $+1$ и -1.

Рассмотрим гармоническую функцию v_r, сопряжённую к u_r в области D_r. Напомним, что n означает единичный вектор, ортогональный к ∂D_r во внутренней граничной точке и направленный в сторону D_r. Если e – единичный касательный вектор в этой точке, то в силу условий Коши-Римана

$$\frac{\partial u_r}{\partial n} = \mp \frac{\partial v_r}{\partial e}\,,$$

где верхний (нижний) знак отвечает случаю, когда D лежит слева (справа) от e. Полагая $e = \gamma_j'(t)/\mid \gamma_j'(t)\mid$, заключаем, что

$$\mid \gamma_j' \mid \frac{\partial u_r}{\partial n} \circ \gamma_j = -\sigma_j (v_r \circ \gamma_j)', \qquad j \in O_r.$$

В результате, соотношению (13) можно придать следующую простую форму:

$$\sum_{j\in I_k} \sigma_j v^+_{\gamma,j} = \text{const}\,, \qquad m_k > 1. \tag{15}$$

Краевые условия (6) в принятых обозначениях принимают вид

$$u^+_{\gamma,j} = f_j, \quad j \in I_k, \quad m_k = 1, \tag{16}$$

а задача Неймана переходит в

$$v^+_{\gamma,j} = f_j + \text{const}, \quad j \in I_k, \quad m_k = 1. \tag{17}$$

Приведенные рассуждения позволяют сформулировать следующую постановку задачи. Пусть задано семейство кусочно-гладких областей D_r, $1 \le r \le n$. Дуги, составляющие контур ∂D_r, занумерованы единым образом Γ_j, $1 \le j \le m$. При этом

$$\partial D_r = \bigcup_{j\in O_r} \Gamma_j \tag{18}$$

по отношению к некоторому разбиению O множества индексов $\{1,..,m\}$ на попарно не пересекающиеся подмножества $O_1,..,O_n$. Пусть F_r – множество узлов контура ∂D_r. Выберем гладкие параметризации $\gamma_j : [0,1] \to \Gamma_j$ дуг Γ_j и рассмотрим некоторое разбиение I множества $\{1,..,m\}$ на подмножества $I_1,..,I_l$.

Будем говорить, что семейство функций $u_r \in C(\overline{D}_r \setminus F_r)$, $1 \le r \le n$, реализуется как непрерывная на двумерной стратифицированной области G функция u, если в обозначениях (11) выполнено условие (14) для каждого $k = 1,..,l$. Другими словами, точки $\gamma_j(t) \in \Gamma_j$, $j \in I_k$, склеиваются при каждом $0 < t < 1$.

Если дополнительно выполнено соотношение (15) для каждого $k = 1,..,l$, то функцию u называем гармонической в G.

Полагая $\phi_r = u_r + iv_r$, в соответствии с (16), приходим к следующей обобщенной задаче Римана-Гильберта для семейства $(\phi_r)_1^n$ аналитических функций:

$$\mathrm{Re}\, A\, \phi_\gamma^+ = f\,, \tag{19}$$

где заданная на [0,1] матрица функция $A(t) = (A_{ij}(t))^l$ блочно-диагональна относительно разбиения I и её диагональные блоки $A(t, I_k)$ при $m_k > 1$ имеют описываемый ниже специальный вид.

Пусть $I_k = \{i_1,..,i_s\}$ и, относительно этой нумерации, $s \times s$-матрица $A(t, I_k)$ записана как $A_{(k)} = \{A_{(k),ij}\}$, $1 \le i,j \le s$. Тогда

$$A_{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ i\sigma_{(1)} & i\sigma_{(2)} & i\sigma_{(3)} & \dots & i\sigma_{(s_{k-1})} & i\sigma_{(s_k)} \end{pmatrix}, \quad k \ge 1,$$

где σ_j, $1 \le j \le m$ – сигнатура ориентаций дуг Γ_j, определенная по γ_j как было указано выше, и $\sigma_{(r)} = \sigma_{j_r}$.

Литература

1. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей / Дж. Спрингер. – М.: ИЛ, 1960.

HARMONIOUS FUNCTIONS ON TWO-DIMENSIONAL STRATIFIED SETS WITH PIECEWISE SMOOTH BOUNDARY

L.A. Kovaleva, A.P. Soldatov

Belgorod State University,

Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: kovaleva_l@bsu.edu.ru

Abstract. The investigating approach to boundary value problems on two-dimensional stratified sets with piecewise smooth boundary for the harmonious function is developped. It is based on the reduction of problem under consideration to connected nonlocal boundary value problem of function theory. Corresponding functions are defined on the family of plain sets.

Key words: the Dirichlet problem on stratified sets, the Neumann problem on stratified sets, the generalized Riemann-Gilbert problem.

УДК 517.956

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО ДРОБНУЮ ПРОИЗВОДНУЮ АДАМАРА И НЕОГРАНИЧЕННЫЙ ОПЕРАТОР

Т.А. Манаенкова

Белгородский государственный университет,
ул.Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: manaenkova ta@mail.ru

Аннотация. В банаховом пространстве рассматриваются прямая и обратная задачи типа Коши с левосторонней дробной производной Адамара порядка $\alpha \in (0,1)$. Устанавливается корректная разрешимость рассматриваемых задач с неограниченным оператором. Для обратной коэффициентной задачи указаны достаточные условия её однозначной разрешимости.

Ключевые слова: операторное уравнение, дробная производная Адамара, обратная коэффициенная задача.

Пусть X – банахово пространство, B – линейный, замкнутый, плотно определенный оператор в X с областью определения $D(B)$ и непустым резольвентным множеством. При $0 < \alpha < 1$ рассмотрим обратную коэффициентную задачу

$$ {}^{A}D_{1+}^{\alpha}u(t) = Bu(t) + (\ln t)^{k-1}p, \tag{1} $$

$$ \lim_{t\to 1} {}^{A}I_{1+}^{1-\alpha}u(t) = u_0, \tag{2} $$

$$ \lim_{t\to e} {}^{A}I_{1+}^{\beta}u(t) = u_1, \tag{3} $$

где $k > 0$,

$$ {}^{A}I_{1+}^{\beta}u(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} u(s)\,\frac{ds}{s} $$

– левосторонний дробный интеграл Адамара порядка $\beta \ge 0$ (при $\beta = 0$ оператор ${}^{A}I_{1+}^{\beta}$ является единичным) (см. [1, с. 250], [2, с. 110]),

$$ {}^{A}D_{1+}^{\alpha}u(t) = t\frac{d}{dt}\,{}^{A}I_{1+}^{1-\alpha}u(t) $$

– левосторонняя дробная производная Адамара порядка $\alpha \in (0,1)$, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция, $u_0, u_1 \in X$.

Как следует из результатов работы [3], корректная постановка начальной задачи для уравнения

$$ {}^{A}D_{1+}^{\alpha}u(t) = Bu(t) + h(t), \qquad t > 1 \tag{4} $$

при $\alpha \in (0,1)$ и достаточно гладкой функции $h(t)$ состоит в задании условия (2).

Определение 1. *Решением задачи*(1)-(3) *называется пара* $(u(t), p)$, *где* $u(t) \in D(B)$ *непрерывная при* $t \in (1, e]$ *функция такая, что* ${}^{A}I_{1+}^{1-\alpha}u(t)$ *представляет собой непрерывно дифференцируемую при* $t \in (1, e]$ *функцию,* $p \in X$, *наконец,* $u(t)$ *и* p *удовлетворяют* (1)-(3).

Определение 2. *Задача* (4), (2) *называется равномерно корректной, если существует заданная на* X, *коммутирующая с* B *операторная функция* ${}^{A}T_{\alpha}(t)$ *и числа* $M > 0$, $\omega \in R$ *такие, что для любого* $u_0 \in D(B)$ *функция* ${}^{A}T_{\alpha}(t)u_0$ *является её единственным решением, и при этом*

$$\left\| {}^{A}T_{\alpha}(t) \right\| \leqslant M \left(\ln t\right)^{\alpha-1} t^{\omega}, \quad t > 1.$$

Замена независимой переменной t и неизвестной функции $u(t)$

$$t = e^{\tau},\ \tau > 0, \quad u(t) = u\left(e^{\tau}\right) = v(\tau) \tag{5}$$

переводит задачу (4), (2), однородную и неоднородную, в уже исследованные задачи для дифференциальных уравнений с дробной производной Римана-Лиувилля

$$D_{0+}^{\alpha}v(\tau) = \frac{d}{d\tau} I_{0+}^{1-\alpha} v(\tau)\,,$$

где $I_{0+}^{1-\alpha}v(\tau) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int\limits_0^{\tau} (\tau - s)^{-\alpha}\, v(s)\, ds$ — левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $1-\alpha$. Указанные замены переводят уравнение (4), начальное условие (2) в следующие соотношения

$$D_{0+}^{\alpha}v(\tau) = Bv(\tau), \qquad \tau > 0, \tag{6}$$

$$\lim_{\tau \to 0+} I_{0+}^{1-\alpha}v(\tau) = u_0, \tag{7}$$

$$D_{0+}^{\alpha}v(\tau) = Bv(\tau) + h\left(e^{\tau}\right), \qquad \tau > 0. \tag{8}$$

Разрешимость задач (6), (7) и (8), (7) установлена в [3].

В работе [3] приводятся условия на оператор B и функцию $h(t)$, обеспечивающие корректную разрешимость задачи (8), (7), которые легко переносятся на задачу (4), (2). Эти условия в банаховом пространстве E, обладающем свойством Радона-Никодима (см. [4, с. 15]), формулируются в терминах оценки нормы производных резольвенты $R\left(\lambda^{\alpha}\right) = \left(\lambda^{\alpha} I - B\right)^{-1}$ (λ^{α} – главная ветвь степенной функции), которая существует в точке λ^{α} при $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$. Упомянутые оценки имеют вид

$$\left\| \frac{d^{n} R\left(\lambda^{\alpha}\right)}{d\lambda^{n}} \right\| \leq \frac{M\ \Gamma(n+\alpha)}{(\mathrm{Re}\ \lambda - \omega)^{n+\alpha}}, \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{9}$$

и являются необходимым и достаточным условием равномерной корректности задачи (4), (2).

В дальнейшем нам понадобятся следующие условия.

Условие 1. *Оператор B таков, что задача (4), (2) равномерно корректна.*

Условие 2. *Выполнено одно из следующих требований:*

a) $h(t) \in C(1,\infty)$, *абсолютно интегрируема в окрестности точки* $t = 1$, *принимает значения в* $D(B)$, $Bh(t) \in C(1,\infty)$ *и также абсолютно интегрируема в окрестности точки* $t = 1$;

b) ${}^AI^{1-\alpha}_{1+}h(t)$ *непрерывна при* $t \geq 1$, *непрерывно дифференцируема при* $t > 1$ *и* ${}^AD^{\alpha}h(t)$ *абсолютно интегрируема в окрестности точки* $t = 1$.

В случае неограниченного оператора B, удовлетворяющего условию 1, решение задачи (4), (2) при $h(t) \equiv 0$ имеет вид (см. [3])

$$u(t) \equiv {}^AT_{\alpha}(t)u_0 = \frac{1}{2\pi i}{}^AD^{1-\alpha}_{1+}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda^{\alpha-1}t^{\lambda}R\left(\lambda^{\alpha}\right)u_0\,d\lambda, \qquad u_0 \in D(B),\ \sigma > \max(0,\omega), \quad (10)$$

а в общем случае

$$u(t) = {}^AT_{\alpha}(t)u_0 + \int\limits_1^t {}^AT_{\alpha}\left(\frac{t}{s}\right)h(s)\,ds\,.$$

При этом функция $h(t)$ должна удовлетворять условию 2.

Установим далее необходимое условие единственности решения обратной задачи (1)-(3) с неограниченным оператором B.

Теорема 1. *Пусть B – линейный замкнутый оператор в E. Предположим, что обратная задача (1)-(3) имеет решение $(u(t),p)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо, чтобы ни один нуль μ_n целой функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ не являлся собственным значением оператора B.*

□ Предположим противное, пусть некоторый нуль μ_n из счетного множества нулей функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ является собственным значением оператора B с собственным вектором $h_n \neq 0$.

Введем в рассмотрение функцию $w(t) = \psi(t)h_n$ и подберем скалярную функцию $\psi(t)$ так, чтобы функция $w(t)$ удовлетворяла уравнению (1) при $p = h_n$ и нулевому начальному условию (2). Легко проверить, что функция $\psi(t)$ должна быть решением следующей задачи Коши

$${}^AD^{\alpha}_{1+}\psi(t) = \mu_n\psi(t) + (\ln t)^{k-1}, \quad (11)$$

$$\lim_{t\to 1} {}^A I_{1+}^{1-\alpha}\psi(t) = 0. \tag{12}$$

Задача (11), (12) имеет единственное решение (см. [5]), которое представимо в виде

$$\psi(t) = \int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\mu_n\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha}\right)(\ln s)^{k-1}\,ds.$$

Поскольку μ_n – нуль функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$, то получаем

$$\lim_{t\to e} {}^A I_{1+}^{\beta}\psi(t) = \Gamma(k)E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\mu_n) = 0.$$

Таким образом, функция $w(t) = \psi(t)h_n$ удовлетворяет уравнению (1) при $p = h_n$ и нулевым условиям (2) и (3), что противоречит предположению единственности решения, поскольку пара $(u(t)+w(t), p+h_n)$ также является решением задачи (1)-(3). ■

Для установления однозначной разрешимости задачи (1)-(3) с неограниченным оператором B, удовлетворяющим условию 1, сведем эту задачу, учитывая (10), к операторному уравнению

$$Gp = q, \tag{13}$$

где

$$Gp = \frac{1}{\Gamma(k)}\lim_{t\to e} {}^A I_{1+}^{\beta}\int_1^t (\ln s)^{k-1} {}^A T_\alpha\left(\frac{t}{s}\right)p\,ds = \lim_{t\to e} {}^A I_{1+}^{k+\beta} {}^A T_\alpha(t)p, \quad G: E\to E, \tag{14}$$

$$q = \frac{1}{\Gamma(k)}\left(u_1 - \lim_{t\to e} {}^A I_{1+}^{\beta}\, {}^A T_\alpha(t)u_0\right), \quad q\in D(B). \tag{15}$$

Таким образом, однозначная разрешимость задачи (1)-(3) сводится к задаче о существовании у ограниченного оператора G, заданного соотношением (14), обратного оператора, определенного на некотором подмножестве банахова пространства E. Для выяснения последнего факта мы получим более удобное для исследований представление оператора с помощью резольвенты $R(\lambda^\alpha) = (\lambda^\alpha I - B)^{-1}$, сузив при этом область определения оператора G до плотного в E множества $D(B)$.

Теорема 2. *Пусть оператор B удовлетворяет условию* 1. *Тогда для любого $p\in D(B)$ справедливо представление*

$$Gp = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} z^{\alpha-1}E_{1,k+\alpha+\beta}(z)R(z^\alpha)\,p\,dz, \tag{16}$$

□ Пусть вначале $p \in D(B^2)$ и, стало быть, $p = R^2(\lambda)p_0$, $p_0 \in E$, где $\lambda \in \rho(B)$, $\rho(B)$ – резольвентное множество оператора B, $\mathrm{Re}\,\lambda > \sigma > \omega$. Тогда из (14), (10), используя полугрупповое свойство дробного интегрирования и тождество Гильберта, после интегрирования по частям получим

$$Gp = \lim_{t\to e}\, {}^A I_{1+}^{k+\beta}\, {}^A D_{1+}^{1-\alpha} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{t^z}{z^{1-\alpha}} R(z^\alpha)\, R^2(\lambda) p_0\, dz =$$

$$= \lim_{t\to e}\, {}^A I_{1+}^{k+\beta+\alpha-1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{t^z}{z^{1-\alpha}} R(z^\alpha)\, R^2(\lambda) p_0\, dz =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(k+\alpha+\beta)} \lim_{t\to e} t\frac{d}{dt} \int\limits_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{k+\alpha+\beta-1} \frac{ds}{s} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} z^{\alpha-1} s^z \left(\frac{R(z^\alpha)\, p_0}{(\lambda - z^\alpha)^2} - \frac{R^2(\lambda) p_0}{\lambda - z^\alpha} - \frac{R(\lambda) p_0}{(\lambda - z^\alpha)^2} \right) dz =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(k+\alpha+\beta)} \lim_{t\to e} t\frac{d}{dt} \int\limits_0^{\ln t} (\ln t - \eta)^{k+\alpha+\beta-1}\, d\eta\, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\exp(z\eta) R(z^\alpha)\, p_0}{z^{1-\alpha}(\lambda - z^\alpha)^2}\, dz\,, \tag{17}$$

при этом интегралы по прямой $\mathrm{Re}\, z = \sigma$ от функций вида

$$\frac{z^{\alpha-1} \exp(z\eta)\ R^j(\lambda) p_0}{(\lambda - z^\alpha)^{3-j}}, \qquad j = 1, 2$$

обратились в нуль в силу леммы Жордана.

Последний интеграл абсолютно сходится. Поэтому, изменив порядок интегрирования и воспользовавшись равенством 1.17 [6]

$$z^\mu E_{1,\mu+1}(\lambda z) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int\limits_0^z e^{\lambda s} (z-s)^{\mu-1}\, ds, \quad \mu > 0\,, \tag{18}$$

из (17) выводим представление

$$Gp = \lim_{t\to e} t\frac{d}{dt} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{(\ln t)^{k+\alpha+\beta}\ R(z^\alpha)\, p_0}{z^{1-\alpha}(\lambda - z^\alpha)^2}\, E_{1,k+\alpha+\beta+1}(z\ln t) dz =$$

$$= \lim_{t\to e} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{(\ln t)^{k+\alpha+\beta-1}\ R(z^\alpha)\, p_0}{z^{1-\alpha}(\lambda - z^\alpha)^2}\, E_{1,k+\alpha+\beta}(z\ln t) dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{E_{1,k+\alpha+\beta}(z) R\left(z^{\alpha}\right) p_0}{z^{1-\alpha}\left(\lambda - z^{\alpha}\right)^2}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{E_{1,k+\alpha+\beta}(z) R\left(z^{\alpha}\right)\left(\left(\lambda - z^{\alpha}\right) I + \left(z^{\alpha} I - B\right)\right)(\lambda I - B) p}{z^{1-\alpha}\left(\lambda - z^{\alpha}\right)^2}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{E_{1,k+\alpha+\beta}(z)}{z^{1-\alpha}\left(\lambda - z^{\alpha}\right)} R\left(z^{\alpha}\right)(\lambda I - B) p\, dz, \qquad p \in D\left(B^2\right). \tag{19}$$

Если обозначить $p_1 = (\lambda I - A)p$, то $p_1 \in D(B)$ и $p = R(\lambda)p_1$. Поэтому равенство (19) примет вид

$$GR(\lambda)p_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{E_{1,k+\alpha+\beta}(z)}{z^{1-\alpha}\left(\lambda - z^{\alpha}\right)} R\left(z^{\alpha}\right) p_1\, dz, \qquad p_1 \in D(B). \tag{20}$$

Левая и правая части равенства (20) представляют собою ограниченные операторы, которые совпадают на $D(B)$. В силу плотности $D(B)$ в E, равенство (20) справедливо при всех $p_1 \in E$. Но тогда $p = R(\lambda)p_1 \in D(B)$ и для таких p справедливо представление

$$Gp = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{E_{1,k+\alpha+\beta}(z)}{z^{1-\alpha}\left(\lambda - z^{\alpha}\right)} R\left(z^{\alpha}\right)\left(\left(\lambda - z^{\alpha}\right) I + \left(z^{\alpha} I - B\right)\right) p\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} z^{\alpha - 1} E_{1,k+\alpha+\beta}(z) R\left(z^{\alpha}\right) p\, dz. \quad \blacksquare$$

Переходим теперь к установлению достаточных условий однозначной разрешимости задачи (1)-(3). Как следует из теоремы 1, нам придется потребовать, чтобы ни один нуль μ_n функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ не являлся собственным значением оператора B. Более того, для установления разрешимости потребуем, чтобы все нули принадлежали резольвентному множеству $\rho(B)$. Учитывая их асимптотику

$$\mu_n^{1/\alpha} = 2\pi n i + (k + \beta - 1)\left(\ln 2\pi |n| + \frac{\pi i}{2}\,\mathrm{sign}\, n\right) + \ln \frac{\alpha}{\Gamma(k+\beta)} + o(1), \quad n \to \pm\infty, \tag{21}$$

отметим, что при $k + \beta > 1$ условие будет налагаться лишь на конечное число нулей μ_n, $n = 1, 2, ..., n_0$ с $\mathrm{Re}\, \mu_n^{1/\alpha} < \sigma$, поскольку остальные автоматически принадлежат $\rho(B)$. В случае $k + \beta \le 1$ нулей с $\mathrm{Re}\, \mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ будет счетное множество.

Теорема 3. *Пусть оператор* B *удовлетворяет условию* 1, $k+\beta>1$, $\sigma>\omega$ *и* $u_0,\ u_1 \in D\left(B^3\right)$. *Если каждый нуль* μ_n, $n=1,2,...,n_0$ *функции* $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ *с* $\mathrm{Re}\,\mu_n^{1/\alpha}<\sigma$ *принадлежит* $\rho(B)$, *то задача* (1)-(3) *имеет единственное решение.*

□ Существование единственного решения задачи (1)-(3) (или операторного уравнения (13)) сводится к доказательству существования обратного у ограниченного оператора G, определяемого равенством (14) (или (16)). При $u_0,\ u_1 \in D\left(B^3\right)$, в силу инвариантности $D(B)$ относительно ${}^AT_\alpha(t)$, правая часть уравнения (13) q принадлежит $D\left(B^3\right)$. Покажем, что оператор G имеет обратный оператор $G^{-1}: D\left(B^3\right)\to E$.

Поскольку каждый нуль $\mu_n^{1/\alpha}$ функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}\left(z^\alpha\right)$ с $\mathrm{Re}\,\mu_n^{1/\alpha}<\sigma$ принадлежит $\rho(B)$, то он принадлежит $\rho(B)$ вместе с некоторой круговой окрестностью Ω_n. Пусть Γ – контур на комплексной плоскости, состоящий из прямой $\mathrm{Re}\ z=\sigma>\omega$ и границ γ_n круговых окрестностей Ω_n, т.е.

$$\Gamma=\{\mathrm{Re}\ z=\sigma\}\bigcup_{Re\ \mu_n^{1/\alpha}<\sigma}\gamma_n\,.$$

Возьмем $\lambda\in\rho(B)$, $\mathrm{Re}\,\lambda>\sigma>\omega$ и рассмотрим ограниченный оператор

$$\Upsilon q=\frac{\alpha}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{z^{\alpha-1}R\left(z^\alpha\right)q\ dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}\left(z^\alpha\right)\left(z^\alpha-\lambda\right)^3},\quad \Upsilon: E\to E\,. \tag{22}$$

Отметим, что интеграл в (22) абсолютно сходится в силу выбора контура Γ, оценки (9), асимптотики (21) и известного (см. [6, с. 134]) асимптотического поведения функции Миттаг-Леффлера при $0<\alpha<2$ и $|z|\to\infty$

$$E_{\alpha,\mu}(z)=\frac{1}{\alpha}z^{(1-\mu)/\alpha}\exp\left(z^{1/\alpha}\right)-$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\frac{z^{-j}}{\Gamma(\mu-\alpha j)}+O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right),\ |\arg z|\le\nu\pi,\ \nu\in(\alpha/2,\min\{1,\alpha\})\,, \tag{23}$$

$$E_{\alpha,\mu}(z)=-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(\mu-\alpha j)\ z^j}+O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right),\quad \nu\pi\le|\arg z|\le\pi\,. \tag{24}$$

Пусть $q\in D(B)$, $\sigma<\sigma_1<\mathrm{Re}\,\lambda$. Тогда, подставляя (16) в (22) и применяя тождество Гильберта, получим

$$\Upsilon Gq=\frac{\alpha}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{z^{\alpha-1}R\left(z^\alpha\right)\ dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}\left(z^\alpha\right)\left(z^\alpha-\lambda\right)^3}\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\xi^{\alpha-1}E_{1,k+\alpha+\beta}(\xi)R\left(\xi^\alpha\right)q\ d\xi=$$

$$= \frac{\alpha}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{z^{\alpha-1}\xi^{\alpha-1}E_{1,k+\alpha+\beta}(\xi)}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}\left(z^{\alpha}\right)\left(z^{\alpha}-\lambda\right)^3} \cdot \frac{R\left(z^{\alpha}\right)q - R\left(\xi^{\alpha}\right)q}{\xi^{\alpha}-z^{\alpha}}\, d\xi dz\,. \tag{25}$$

Интеграл в (25) абсолютно сходится, поэтому меняя порядок интегрирования, будем иметь

$$\Upsilon G q = \frac{\alpha}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma} \frac{z^{\alpha-1} R\left(z^{\alpha}\right) q\; dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}\left(z^{\alpha}\right)\left(z^{\alpha}-\lambda\right)^3} \int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{\xi^{\alpha-1}E_{1,k+\alpha+\beta}(\xi)\; d\xi}{\xi^{\alpha}-z^{\alpha}} -$$

$$-\frac{\alpha}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\sigma_1 - \infty}^{\sigma_1 + \infty} \xi^{\alpha-1}E_{1,k+\alpha+\beta}(\xi) R\left(\xi^{\alpha}\right) q\; d\xi \int\limits_{\Gamma} \frac{z^{\alpha-1}\; dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}\left(z^{\alpha}\right)\left(z^{\alpha}-\lambda\right)^3 \left(\xi^{\alpha}-z^{\alpha}\right)}\,. \tag{26}$$

Внутренний интеграл (после замены $\eta = z^{\alpha}$) во втором слагаемом (26) равен нулю в силу выбора контура Γ и леммы Жордана. А для вычисления интегралов в первом слагаемом, используем равенство (18), формулу (см. [1, с. 33])

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \exp(-t\xi) E_{\alpha,1}\left(t^{\alpha} z^{\alpha}\right)\; dt = \frac{\xi^{\alpha-1}}{\xi^{\alpha}-z^{\alpha}}, \qquad \left|\frac{z^{\alpha}}{\xi^{\alpha}}\right| < 1\,,$$

равенство $I^{\nu} E_{\alpha,1}\left(t^{\alpha} z^{\alpha}\right) = t^{\nu} E_{\alpha,\nu+1}\left(t^{\alpha} z^{\alpha}\right)$ $\;(\nu > 0)$ и лемму Жордана. Таким образом, для $q \in D(B)$, справедливо равенство

$$\Upsilon G q = \frac{\alpha}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma} \frac{z^{\alpha-1} R(z^{\alpha}) q\; dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}\left(z^{\alpha}\right)\left(z^{\alpha}-\lambda\right)^3}\; \lim_{t\to 1} I^{k+\alpha+\beta-1} \int\limits_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} \frac{\xi^{\alpha-1}\exp(\xi t)\; d\xi}{\xi^{\alpha}-z^{\alpha}} =$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{z^{\alpha-1} R(z^{\alpha}) q\; dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}\left(z^{\alpha}\right)\left(z^{\alpha}-\lambda\right)^3}\; \lim_{t\to 1} I^{k+\alpha+\beta-1} E_{\alpha,1}\left(t^{\alpha} z^{\alpha}\right) =$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{z^{\alpha-1} R(z^{\alpha}) q\; dz}{\left(z^{\alpha}-\lambda\right)^3} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\Gamma)_{\alpha}} \frac{R(\eta) q\; d\eta}{(\eta-\lambda)^3} = R^3(\lambda) q\,,$$

где $(\Gamma)_{\alpha}$ – контур, полученный из контура Γ после замены $\eta = z^{\alpha}$: $z \in \Gamma$, $\eta \in (\Gamma)_{\alpha}$.

Коммутирующие операторы Υ, G, $R(\lambda)$ ограничены и область определения $D(B)$ плотна в E, поэтому равенство $\Upsilon G q = R^3(\lambda) q$ справедливо и для $q \in E$, $\Upsilon G : E \to D\left(B^3\right)$. Отсюда следует, что оператор $G^{-1} q = (\lambda I - B)^3 \Upsilon q$ при $q \in D\left(B^3\right)$ является обратным по отношению к G. Действительно,

$$G G^{-1} q = G(\lambda I - B)^3 \Upsilon q = R^3(\lambda)(\lambda I - B)^3 q = q, \qquad q \in D\left(B^3\right)\,,$$

$$G^{-1} G q = (\lambda I - B)^3 \Upsilon G q = q, \qquad q \in E.$$

Что касается решения задачи (1)-(3), то принадлежащий E элемент p имеет вид $p = (\lambda I - B)^3 \Upsilon q$, где элемент $q \in D(B^3)$ определяется равенством (15), оператор Υ – равенством (22), $\lambda \in \rho(B)$, $\mathrm{Re}\,\lambda > \sigma > \omega$, а для функции $u(t)$ справедливо представление

$$u(t) = {}^{A}T_\alpha(t)u_0 + \int\limits_1^t {}^{A}T_\alpha\left(\frac{t}{s}\right) p\, ds\,. \quad \blacksquare$$

В случае $k + \beta \le 1$ у функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ нулей μ_n с $\mathrm{Re}\;\mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ будет счетное множество, поэтому мы потребуем выполнения следующего условия.

Условие 3. *Каждый нуль μ_n, $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ с Re $\mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ принадлежит $\rho(B)$ и существуют $\varepsilon \in [0,1)$ и $d > 0$ такие, что*

$$\sup_{Re\ \mu_n^{1/\alpha} < \sigma} \left\| \frac{R(\mu_n)}{\mu_n^\varepsilon} \right\| \le d.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 3, $k + \beta \le 1$ *и* $u_0,\ u_1 \in D(B^3)$. *Тогда задача* (1)-(3) *имеет единственное решение.*

$\square$ Также как и в теореме 3, введем в рассмотрение оператор Υ, определяемый равенством (22). В рассматриваемом случае контур Γ содержит уже счётное множество окружностей γ_n, и для доказательства абсолютной сходимости интеграла в равенстве (22) рассмотрим интеграл по окружностям γ_n, где n достаточно большие ($|n| \ge n_0$). Пусть $(\gamma_n)_\alpha$ – контур, получаемый из γ_n после замены $\xi = z^\alpha$: $z \in \gamma_n$, $\xi \in (\gamma_n)_\alpha$. Тогда

$$\frac{\alpha}{2\pi i} \int\limits_{\bigcup \gamma_n} \frac{z^{\alpha-1} R(z^\alpha) q\; dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}\left(z^\alpha\right)\left(z^\alpha - \lambda\right)^3} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\bigcup (\gamma_n)_\alpha} \frac{R(\xi) q\; dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\xi)(\xi - \lambda)^3} =$$

$$= \sum_{n=-\infty, |n| \ge n_0}^{+\infty} \frac{R\left(\mu_n\right) q}{E'_{\alpha,k+\alpha+\beta}\left(\mu_n\right)\left(\lambda - \mu_n\right)^3}\,, \tag{27}$$

при этом, поскольку (см. [6, формула (1.5) на с. 118])

$$E'_{\alpha,k+\alpha+\beta}\left(\mu_n\right) = \frac{1}{\alpha \mu_n}\left(E_{\alpha,k+\alpha+\beta-1}\left(\mu_n\right) - (k+\alpha+\beta-1)E_{\alpha,k+\alpha+\beta}\left(\mu_n\right)\right)\,,$$

то, учитывая асимптотику (23) функции Миттаг-Леффлера и асимптотику (21), получим

$$E'_{\alpha,k+\alpha+\beta}\left(\mu_n\right) = \frac{1}{\alpha\mu_n}\left(\frac{\mu_n^{(2-k-\beta)/\alpha - 1}(2\pi|n|)^{k+\beta-1} \exp\left(i\ \mathrm{Im}\ \mu_n^{1/\alpha}\right)}{\Gamma(k+\beta)} - \frac{1}{\Gamma(k+\beta-1)\mu_n} - \right.$$

$$-\frac{(k+\alpha+\beta-1)\mu_n^{(1-k-\beta)/\alpha-1}(2\pi|n|)^{k+\beta-1}\exp\left(i\ \mathrm{Im}\ \mu_n^{1/\alpha}\right)}{\Gamma(k+\beta)}+\frac{k+\alpha+\beta-1}{\Gamma(k+\beta)\mu_n}+O\left(\frac{1}{|\mu_n|^2}\right)\Bigg).$$

Таким образом,

$$E'_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\mu_n)=\frac{1}{\alpha\ \mu_n^{2-1/\alpha}}\left(\frac{\exp\left(i\ \mathrm{Im}\ \mu_n^{1/\alpha}\right)}{\Gamma(k+\beta)}\cdot\left(\frac{\mu_n^{1/\alpha}}{2\pi|n|}\right)^{1-k-\beta}+O\left(\frac{1}{|\mu_n|^{1/\alpha}}\right)\right). \tag{28}$$

В силу равенства (28), условия 3 и асимптотики (21) ряд (27), а, следовательно и интеграл по $\bigcup\gamma_n$, абсолютно сходятся.

Сходимость же в равенстве (22) интеграла по прямой $\mathrm{Re}z=\sigma$, очевидно, следует из неравенства Хилле-Иосиды и асимптотики (24).

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 3, мы его опускаем и доказательство теоремы 4 тем самым завершено. ■

Заметим, что в работе [5] рассмотрен случай, когда оператор B является генератором экспоненциально ограниченной C_0-полугруппы. В этом случае решение задачи (4), (2) и оператор G имеют другой вид, но условия однозначной разрешимости обратной коэффициентной задачи (1)-(3) остаются прежними.

Рассмотрим обратную коэффициентную задачу с регуляризованной дробной производной Адамара порядка $\alpha\in(0,1)$

$${}^A\partial^\alpha_{a+}u(t)={}^AD^\alpha_{a+}\left(u(t)-u(a)\right)={}^AD^\alpha_{a+}u(t)-\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{-\alpha}\frac{u(a)}{\Gamma(1-\alpha)},$$

вида

$${}^A\partial^\alpha_{1+}u(t)=Bu(t)+(\ln t)^{k-1}p\,, \tag{29}$$

$$u(1)=u_0\,, \tag{30}$$

$$\lim_{t\to e}{}^AI^\beta_{1+}u(t)=u_1\,. \tag{31}$$

Учитывая формулу связи между решениями прямых задач с регуляризованной и нерегуляризованной дробными производными Адамара (см. [5])

$${}^AS_\alpha\left(a\ \exp t\right)u_0=I^{1-\alpha\,A}T_\alpha\left(a\ \exp t\right)u_0\,,$$

запишем решение прямой задачи (29), (30) в виде

$$u(t)={}^AS_\alpha(t)u_0+\int\limits_1^t{}^AT_\alpha\left(\frac{t}{s}\right)h(s)\ ds\,,$$

где

$$ {}^{A}S_{\alpha}(t)u_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda^{\alpha-1}t^{\lambda}R\left(\lambda^{\alpha}\right)u_0\,d\lambda, \quad u_0\in D(B),\ \sigma>\max(0,\omega)\,, $$

при этом функция $h(t)$ должна удовлетворять условию 2.

Поскольку влияние неоднородности в случае регуляризованной дробной производной Адамара определяется тем же выражением, что и в случае нерегуляризованной дробной производной Адамара, то условия однозначной разрешимости обратной коэффициентной задачи (29)-(31) при $k \geq 1$ будут таким как и в теоремах 3 и 4.

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Мн.: Наука и техника, 1987.

2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and application of fractional differential equations. Math. Studies. V.204 / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. – Elsevier, 2006.

3. Глушак А.В. О задаче типа Коши для неоднородного абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной // Вестник ВГУ. Серия: Физика, математика. – Воронеж, 2002. – 1. – С.121-123.

4. Arendt W., Batty C., Hieber M., Neubrander F. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems / W. Arendt, C. Batty, M. Hieber, F. Neubrander. – Berlin: Birkhäuser Verlag, 2001.

5. Глушак А.В., Манаенкова Т.А. Абстрактные дифференциальные уравнения с дробными производными Адамара // AMAH, 2009.

6. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М.М. Джрбашян. – М.: Наука, 1966.

DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR THE ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATION THAT CONTAINS HADAMAR FRACTIONAL DERIVATIVE AND UNBOUNDED OPERATOR

T.A. Manaenkova

Belgorod State University,

Pobedy str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: manaenkova ta@mail.ru

Abstract. Direct and inverse Cauchy type problems with Hadamar fractional derivative of order $\alpha \in (0,1)$ in the Banach space is considered. It is proved the well-posed solvability of given problems with the unbounded operator. Sufficient conditions of the unique solvability are specified for the inverse problem.

Key words: operator equation, Hadamar fractional derivative, inverse coefficient problem.

УДК 517.9

ОБ УСЛОВИИ ШАПИРО-ЛОПАТИНСКОГО В ЗАДАЧЕ РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В.А. Полунин, А.П. Солдатов

Белгородский государственный университет

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: soldatov@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе рассматривается условие Шапиро-Лопатинского краевых задач для трехмерного аналога системы Коши-Римана. Это условие обеспечивает разрешимость задачи Римана-Гильберта для эллиптических систем с частными производными первого порядка и состоит в дополнительном ограничении на матрицу краевого условия. В данной работе получен критерий, позволяющий в явном виде описать условие Шапиро-Лопатинского в терминах матрицы краевого условия и нормального вектора к граничной поверхности.

Ключевые слова: задача Римана-Гильберта, условие Шапиро-Лопатинского, система Моисила-Теодореску, эллиптические системы, граничные задачи.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим эллиптическую систему Моисила-Теодореску [1]

$$M\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) u(x) = 0\,, \qquad (1)$$

где дифференциальный оператор $M(\zeta) = M(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ определяется матрицей

$$M(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \zeta_1 & 0 & -\zeta_3 & \zeta_2 \\ \zeta_2 & \zeta_3 & 0 & -\zeta_1 \\ \zeta_3 & -\zeta_2 & \zeta_1 & 0 \end{pmatrix},$$

а $u(x) = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ – искомый вектор.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 - 2013 годы (госконтракты № П19 от 18.03.2010г., № П693 от 20.05.2010г., № 02.740.11.0613 от 29.03.2010г.)

Отметим некоторые из свойств матричного оператора в (1), которые будут использоваться в дальнейшем. Можно показать, что справедливы соотношения

$$M(\zeta)M^{\top}(\zeta) = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2\,, \quad \det M(\zeta) = -(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2)^2, \quad \zeta_j \in \mathbb{C}\,, \tag{2}$$

где $\top$ – символ матричного транспонирования.

Если $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 = 0$ и $\zeta_j, j = 1, 2, 3$, одновременно в нуль не обращаются, то ранг матрицы $M(\zeta)$ равен двум. Действительно, если $\zeta_1 \neq 0$, то первые две строки $M(\zeta)$ линейно независимы, а третья и четвертая строки являются их линейной комбинацией. Аналогично, при $\zeta_2 \neq 0$ первая и третья строки $M(\zeta)$ образуют линейно независимую систему.

Если же $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 \neq 0$, тогда из (2) следует, что $M(\zeta)$ обратима. При этом обратная $M^{-1}(\zeta)$ и присоединенная $M^*(\zeta)$ матрицы имеют вид

$$M^{-1}(\zeta) = (\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2)^{-1} M^{\top}(\zeta), \quad M^*(\zeta) = -(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2) M^{\top}(\zeta). \tag{3}$$

В ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей Γ для этой системы (1) ставится задача Римана-Гильберта

$$B(y)u^+(y) = f(y), \quad y \in \Gamma\,, \tag{4}$$

где $B = B(y)$ – заданная на Γ непрерывная 2×4 матрица ранга 2,

$$u^+(y) = \lim_{x \to y} u(x), \quad y \in \Gamma,\ x \in D\,,$$

и $f(y)$ – заданный на Γ непрерывный двухкомпонентный вектор. В этой задаче требуется найти решение $u(x) \in C^1(D) \cap C(\overline{D})$ системы (1), удовлетворяющее краевому условию (4).

Как известно, условие Шапиро – Лопатинского (условие дополнительности) [2] обеспечивает фредгольмовость задачи (1), (4). Оно представляет собой дополнительное ограничение на матрицу B в (4) и состоит в следующем.

Пусть $\xi = \xi(y)$ и $n = n(y)$, соответственно, касательный и единичный нормальный векторы к поверхности Γ в фиксированной точке y. В силу (2)

$$\det M(\xi + zn) = -(z^2 + |\xi|^2)^2, \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

и, следовательно, уравнение $\det M(\xi + zn) = 0$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ имеет один корень $z = i|\xi|$ кратности 2. Тогда условие дополнительности считается выполненным, если для любого ненулевого вектора ξ, касательного к Γ в точке $y \in \Gamma$ и каждого вектора – строки $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ соотношение

$$\lambda B M^*(\xi + zn) \equiv 0 \bmod (z - i|\xi|)^2 \tag{5}$$

для многочленов переменной z влечет $\lambda = 0$.

При фиксированном $y \in \Gamma$ условие (5) зависит только от матрицы $B = B(y)$ и нормали $n = n(y)$ к поверхности Γ в точке y. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ единичную сферу S и множество $\mathcal{D}$ – множество нормалей $n \in S$, для которых условие (5) выполнено для заданной матрицы $B = B(y)$. Очевидно, что это множество симметрично, то есть вместе с n ему принадлежит и $-n$.

Пусть $b^{kj} = b_{1k}b_{2j} - b_{1j}b_{2k}$ означают соответствующие миноры второго порядка матрицы B, которые занумеруем $\alpha_1 = b^{12}, \alpha_2 = b^{13}, \alpha_3 = b^{14}, \alpha_4 = b^{23}, \alpha_5 = b^{24}, \alpha_6 = b^{34}$. В этих обозначениях рассмотрим вектор $s = (s_1, s_2, s_3)$ с компонентами

$$s_1 = \alpha_1 + \alpha_6, \quad s_2 = \alpha_2 - \alpha_5, \quad s_3 = \alpha_3 + \alpha_4\,, \tag{6}$$

и две симметрические 3×3 матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2\alpha_6 & -\alpha_2 + \alpha_5 & -\alpha_3 - \alpha_4 \\ -\alpha_2 + \alpha_5 & 2\alpha_1 & 0 \\ -\alpha_3 - \alpha_4 & 0 & 2\alpha_1 \end{pmatrix},$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} 2\alpha_2 & -\alpha_1 - \alpha_6 & 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_6 & 2\alpha_5 & -\alpha_3 - \alpha_4 \\ 0 & -\alpha_3 - \alpha_4 & 2\alpha_2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Обозначим через $S_j(n)$ множество всех векторов $\xi \in S$, ортогональных векторам $A_j n$ и n. Заметим, что если векторы $A_j n$ и n линейно независимы, то множество $S_j(n)$ состоит из двух элементов $\pm\nu/|\nu|$, где ν есть векторное произведение $[A_j n, n]$. В противном случае, n есть собственный вектор матрицы A_j и множество $S_j(n)$ является окружностью в плоскости, ортогональной к вектору n.

Лемма 1. *Вектор s с компонентами (6) отличен от нуля в каждой точке $y \in \Gamma$.*

$\Box$ Предположим противное, то есть в условиях леммы вектор $s = 0$. Пусть $B_{(k)} = (b_{1k}, b_{2k})$ означает k-й столбец матрицы B. Тогда, в наших обозначениях, для некоторого $1 \le j \le 6$ можно записать $\alpha_j = \det(B_{(k)}, B_{(s)})$, $1 \le k < s \le 4$. По условию ранг матрицы B равен двум, так что $\alpha_j \ne 0$ для некоторого j и, следовательно, существует обратная матрица $C = (B_{(k)}, B_{(s)})^{-1}$.

По аналогии с введенным обозначениям α_j будем обозначать через α'_j соответствующие миноры матрицы $B' = CB$. Тогда, с одной стороны, $\alpha'_j = \det(CB_{(k)}, CB_{(s)}) = \alpha_j \det C$ и предположение $s = 0$ переходит в условие $s' = 0$ для вектора s' с компонентами $s'_1 = \alpha'_1 + \alpha'_6$, $s'_2 = \alpha'_2 - \alpha'_5$, $s'_3 = \alpha'_3 + \alpha'_4$. С другой стороны, в силу выбора матрицы C столбцы матрицы B' для некоторых $1 \le k < s \le 4$ примут вид $B'_{(k)} = (1, 0)$, $B'_{(s)} = (0, 1)$.

По условию α_j одновременно в нуль не обращаются. Пусть $\alpha_1 \neq 0$, тогда $\alpha'_1 = 1$, $\alpha'_2 = x_2$, $\alpha'_3 = y_2$, $\alpha'_4 = -x_1$, $\alpha'_5 = -y_1$, $\alpha'_6 = x_1y_2 - x_2y_1$, где

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда соотношения $\alpha'_1 + \alpha'_6 = \alpha'_3 + \alpha'_4 = \alpha'_2 - \alpha'_5 = 0$ приводят к противоречию $x_1^2 + x_2^2 = -1$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что получится такой же результат и в случаях $\alpha_j \neq 0$, $2 \le j \le 6$. ■

Рассмотрим подробнее множество нормалей $\mathcal{D}$ для которых выполнено условие (5).

Лемма 2. *Пусть вектор нормали $n = (n_1, n_2, n_3) \in S$ и $n_1 \neq 0$. Тогда $n \in \mathcal{D}$ в том и только том случае, когда выполнено условие*

$$(A_1\xi, \xi) \neq (A_1n, n), \quad \text{при} \quad \xi \in S_1(n)\,. \tag{8}$$

Если $n_1 = 0$, то вектор $n \in \mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда

$$(A_1\xi, \xi) \neq (A_1n, n), \quad \text{при} \quad \xi \in S_1(n),\ \xi_1 \neq 0\,, \tag{9}$$

$$(A_2\xi, \xi) \neq (A_2n, n), \quad \text{при} \quad \xi \in S_2(n),\ \xi_1 = 0\,. \tag{10}$$

□ Пусть b_1 и b_2 означают, соответственно, первый и второй вектор – столбцы матрицы $B^\top$. С учетом соотношений (3) выражение (5) примет вид

$$(z + i|\xi|)\lambda BM^\top(\xi + zn) = P(z)(z - i|\xi|), \quad z \in \mathbb{C}$$

с некоторым полиномом $P(z)$. Полагая в последнем $z = i|\xi|$, получим эквивалентное соотношению (5) условие: для любого единичного вектора ξ, касательного к Γ в точке y и каждого вектора-строки $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ соотношение $\lambda BM^\top(\xi + in) = 0$ влечет $\lambda = 0$. Это означает, что ранг матрицы $M(\xi + in)B^\top$ равен двум, то есть равенство

$$\lambda_1 M(\zeta)b_1 + \lambda_2 M(\zeta)b_2 = M(\zeta)(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) = 0, \quad \zeta = \xi + in\,,$$

возможно только при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Таким образом, соотношение (5) эквивалентно условию:

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \in \ker M(\zeta)\,, \tag{11}$$

что влечет $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Для дальнейшего изучения (11) найдем размерность и базис $\ker M(\zeta)$. Так как по условию $|\xi| = |n| = 1$ и $\zeta_j = \xi_j + in_j$, получим $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 = 0$. Тогда, в силу равенств (2), имеем $M(\zeta)M^\top(\zeta) = 0$. Следовательно, вектор-столбцы матрицы $M^\top(\zeta)$, или, что равносильно, вектор-строки матрицы $M(\zeta)$ принадлежат $\ker M(\zeta)$. Кроме того, как было отмечено выше, при условии $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 = 0$ ранг матрицы $M(\zeta)$ равен двум. Это означает, что базис $\ker M(\zeta)$ состоит из двух линейно независимых вектор-строк матрицы $M(\zeta)$, которые обозначим $c_1 = c_1(\zeta)$, $c_2 = c_2(\zeta)$. Поэтому условие (11) означает линейную независимость векторов b_1, b_2, c_1, c_2.

Так как $|\xi| = |n| = 1$, то комплексные числа $\zeta_j = \xi_j + in_j$, $j = 1, 2, 3$, одновременно в нуль не обращаются. При $\zeta_1 \neq 0$ базис c_1 и c_2 представляет собой, соответственно, первую и вторую вектор-строки матрицы $M(\zeta)$. Поэтому линейная независимость векторов b_1, b_2, c_1, c_2 означает, что

$$h_1(\zeta) = \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \zeta_1 & 0 & -\zeta_3 & \zeta_2 \end{pmatrix} \neq 0, \quad \zeta_1 \neq 0.$$

В случае $\zeta_2 \neq 0$ базис c_1, c_2 – есть первая и третья вектор-строки матрицы $M(\zeta)$, так что

$$h_2(\zeta) = \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \zeta_2 & \zeta_3 & 0 & -\zeta_1 \end{pmatrix} \neq 0\,, \quad \zeta_2 \neq 0\,.$$

Тогда с использованием теоремы Лапласа [3], получим

$$h_1(\zeta) = -b^{34}\zeta_1^2 + b^{12}\zeta_2^2 + b^{12}\zeta_3^2 + (b^{24} - b^{13})\zeta_1\zeta_2 - (b^{14} + b^{23})\zeta_1\zeta_3\,,$$

$$h_2(\zeta) = b^{13}\zeta_1^2 + b^{24}\zeta_2^2 + b^{13}\zeta_3^2 - (b^{12} + b^{34})\zeta_1\zeta_2 - (b^{14} + b^{23})\zeta_2\zeta_3\,.$$

Выражения в правых частях последних равенств представляют собой квадратичные формы относительно $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ с матрицами A_j, которые определены в (7), так что можно записать $h_j(\zeta) = (A_j\zeta, \zeta)$, где $(\cdot\,,\cdot)$ означает стандартное скалярное произведение. С учетом последнего условие (10) эквивалентно следующему: вектор $n \in \mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда для $\zeta = \xi + in$, $\xi \perp n$ справедливы соотношения

$$(A_1\zeta, \zeta) \neq 0, \quad \text{если} \quad \zeta_1 \neq 0\,, \tag{12}$$

$$(A_2\zeta,\zeta) \neq 0, \quad \text{если} \quad \zeta_1 = 0\,, \tag{13}$$

в которых учтено, что $\zeta_1 = 0$ влечет $\zeta_2 \neq 0$. В силу симметричности матриц A_j имеем

$$(A_j\zeta,\zeta) = (A_j\xi,\xi) - (A_j n, n) + 2i(A_j n, \xi)\,.$$

Если $n_1 \neq 0$, то для произвольного вектора $\xi \in S_1(n)$ из (12) следует условие (8). Пусть $n_1 = 0$, тогда в силу условия (12) либо $\xi_1 \neq 0$ и имеем условие (9), либо $\xi_1 = 0$, тогда из (13) следует условие (10). Таким образом, условие $n = (0, n_2, n_3) \in \mathfrak{D}$ описывается соотношениями (9) и (10) на двух непересекающихся множествах точек $\xi \in S_j(n)$, $j = 1, 2$. ■

На основании леммы 2 сформулируем основной результат данной работы в терминах вектора s с компонентами (6).

Теорема. *Вектор $n = (n_1, n_2, n_3) \in \mathfrak{D}$ тогда и только тогда, когда $(s, n) \neq 0$*

□ Рассмотрим подробнее условия (8)-(10) леммы 2.

Покажем, что при $n_1 \neq 0$ условие (8) равносильно тому, что либо $\nu = [A_1 n, n] = 0$, либо

$$|\nu|^2(A_1 n, n) \neq (A_1\nu, \nu), \quad \nu \neq 0\,. \tag{14}$$

Пусть $\nu = 0$, то есть n является собственным вектором матрицы A_1. Рассмотрим сначала случай, когда

$$(\alpha_2 - \alpha_5)^2 + (\alpha_3 + \alpha_4)^2 \neq 0\,. \tag{15}$$

Обозначим через λ_0 и $\lambda_\pm$ собственные значения матрицы A_1. Характеристическое уравнение этой матрицы имеет вид

$$\det(\lambda - A) = (\lambda - 2\alpha_1)(\lambda^2 + 2(\alpha_6 - \alpha_1)\lambda - 4\alpha_1\alpha_6 - (\alpha_3 + \alpha_4)^2 - (\alpha_2 - \alpha_5)^2) = 0\,.$$

и, следовательно, собственные значения выражаются равенствами

$$\lambda_0 = 2\alpha_1, \quad \lambda_\pm = \alpha_1 - \alpha_6 \pm \Delta\,,$$

где $\Delta = \sqrt{(\alpha_1 + \alpha_6)^2 + (\alpha_5 - \alpha_2)^2 + (\alpha_3 + \alpha_4)^2}$, при этом, в силу (15), имеем $\lambda_- < \lambda_0 < \lambda_+$.

Рассмотрим ортонормированный базис e_0 и $e_\pm$ собственных векторов матрицы A_1, отвечающих собственным значениям λ_0 и $\lambda_\pm$. Непосредственно можно убедиться, что $e_0 = \nu_0/|\nu_0|$, $e_\pm = \nu_\pm/|\nu_\pm|$, где

$$\nu_0 = (0, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_5 - \alpha_2)\,, \quad \nu_\pm = (-\alpha_1 - \alpha_6 \pm \Delta, \alpha_5 - \alpha_2, -\alpha_3 - \alpha_4)\,. \tag{16}$$

Если $n = e_+$, то для любого $\xi = x_- e_- + x_0 e_0$, $x_-^2 + x_0^2 = 1$, условие (8) принимает вид $(A_1\xi, \xi) \neq (A_1 e_+, e_+)$ или $x_-^2\lambda_- + x_0^2\lambda_0 \neq \lambda_+$, и, в силу (15), выполнено. Аналогично можно показать, что (8) выполнено и для $n = e_-$. Если $n = e_0$, то (8) нарушено, так как не выполнено условие $n_1 \neq 0$.

Рассмотрим теперь второй случай, когда условие (15) не выполнено, то есть когда $\alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_2 - \alpha_5 = 0$. В этом случае собственные значения λ_0, $\lambda_\pm$ и отвечающие им собственные векторы e_0, $e_\pm$ матрицы A_1 определяются равенствами

$$\lambda_0 = -2\alpha_6,\ \lambda_\pm = 2\alpha_1, \quad e_0 = (1,0,0)\,,$$

а e_-, e_+ – произвольный ортонормированный базис в плоскости $x_1 = 0$.

Для $n = e_-$, $n = e_+$ не выполнено условие $n_1 \neq 0$, поэтому остается рассмотреть $n = e_0$. В этом случае для любого $\xi = x_- e_- + x_+ e_+$, $x_-^2 + x_+^2 = 1$, условие (8) равносильно соотношению $x_-^2\lambda_- + x_+^2\lambda_+ \neq \lambda_0$ или $\alpha_1 + \alpha_6 \neq 0$, и, в силу леммы 1 всегда выполнено.

Пусть теперь $\nu \neq 0$, то есть множество $S_1(n)$ состоит из двух элементов $\pm\nu/|\nu|$. Подставляя $\xi = \pm\nu/|\nu|$ в неравенство (8) получим соотношение (14).

Перейдем теперь к рассмотрению условий (9) и (10) леммы 2. Покажем, что при выполнении (15) вектор $n \in \mathfrak{D}$ тогда и только тогда, когда

$$n_3(\alpha_3 + \alpha_4) \neq n_2(\alpha_5 - \alpha_2), \quad 2(\alpha_2 - \alpha_5)n_2 n_3 = (\alpha_3 + \alpha_4)(n_2^2 - n_3^2)\,. \tag{17}$$

В предположении (15) рассмотрим сначала условие (9) леммы 2. Пусть сначала $\nu = [A_1 n, n] \neq 0$, тогда для любого $\xi = \pm\nu/|\nu|$ имеем $\xi_1 = 0$, и, следовательно, условие (9) не выполнено. Пусть теперь $\nu = 0$, то есть n является собственным вектором матрицы A_1. В силу (16) остается рассмотреть $n = e_0$. Тогда для любого $\xi = x_- e_- + x_+ e_+$, $x_-^2 + x_+^2 = 1$, вектор $n \notin \mathfrak{D}$ тогда и только тогда, когда

$$x_-^2\lambda_- + x_+^2\lambda_+ = \lambda_0, \quad \text{при} \quad x_-(e_-)_1 + x_+(e_+)_1 \neq 0\,,$$

где $(e_\pm)_1$ означают первые компоненты векторов $e_\pm$. Последние соотношения несовместны, так как

$$x_\pm = \sqrt{\frac{\Delta \pm (\alpha_1 + \alpha_6)}{2\Delta}}\,, \quad (e_\pm)_1 = \frac{-(\alpha_1 + \alpha_6) \pm \Delta}{\sqrt{2\Delta(\Delta \mp (\alpha_1 + \alpha_6))}}\,,$$

и, следовательно, $x_-(e_-)_1 + x_+(e_+)_1 = 0$. Таким образом $n \in \mathfrak{D}$ равносильно $n \neq e_0$.

Пусть теперь условие (15) не выполнено, то есть $\alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_2 - \alpha_5 = 0$. Тогда условие (9) можно проверить непосредственно. Поскольку $|\xi| = 1$, имеем $(A_1\xi, \xi) = 2\alpha_1 - 2(\alpha_1 + \alpha_6)\xi_1^2$.

С учетом этого (9) примет вид $(\alpha_1+\alpha_6)\xi_1^2 \neq 0$, и, следовательно, выполнено, поскольку числа $\alpha_1+\alpha_6$, $\alpha_2-\alpha_5$, $\alpha_3+\alpha_4$ одновременно в нуль не обращаются.

Рассмотрим теперь условия (10). Предположим сначала, что выполнено условие (15). Пусть $\widetilde{\xi}=(\xi_2,\xi_3)$, $\widetilde{n}=(n_2,n_3)$ означают единичные векторы и рассмотрим диагональный блок матрицы A_2

$$\widetilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 2\alpha_5 & -\alpha_3-\alpha_4 \\ -\alpha_3-\alpha_4 & 2\alpha_2 \end{pmatrix},$$

Так как в нашем случае $\xi_1=n_1=0$, то условие (10) можно переписать в форме

$$(\widetilde{A}_2\widetilde{\xi},\widetilde{\xi}) \neq (\widetilde{A}_2\widetilde{n},\widetilde{n}) \quad \text{при} \quad (\widetilde{A}_2\widetilde{n},\widetilde{\xi}) = (\widetilde{n},\widetilde{\xi}) = 0\,. \tag{18}$$

Если $\widetilde{A}_2\widetilde{n}$ и $\widetilde{n}$ линейно независимы, то из (18) следует $\widetilde{\xi}=0$, что невозможно. Поэтому $\widetilde{n}$ должен быть собственным вектором матрицы $\widetilde{A}_2$. Характеристическое уравнение этой матрицы

$$(\widetilde{\lambda}-2\alpha_5)(\widetilde{\lambda}-2\alpha_2)-(\alpha_3+\alpha_4)^2=0$$

имеет корни

$$\widetilde{\lambda}_\pm = \alpha_2+\alpha_5 \pm \sqrt{(\alpha_2+\alpha_5)^2+(\alpha_3+\alpha_4)^2}\,,$$

и, в предположении (15), имеем $\widetilde{\lambda}_+ \neq \widetilde{\lambda}_-$.

Пусть $\widetilde{e}_-$ и $\widetilde{e}_+$ означают ортонормированный базис собственных векторов матрицы A_1, отвечающих собственным значениям $\widetilde{\lambda}_\pm$. Тогда возможны два случая. Если $\widetilde{n}=\widetilde{e}_+$, то $\widetilde{\xi}=\widetilde{e}_-$ и (18) равносильно $\widetilde{\lambda}_+\neq\widetilde{\lambda}_-$. Аналогично рассматривается случай $\widetilde{n}=\widetilde{e}_-$. Поэтому, в предположении (15) условия (10) всегда выполнены. Таким образом, вектор $n\in\mathcal{D}$ равносильно тому, что векторы $\widetilde{A}_2\widetilde{n}$ и $\widetilde{n}$ коллинеарны.

В случае $\alpha_2=\alpha_5$, $\alpha_3+\alpha_4=0$, условия (18) легко проверить непосредственно. В этом случае матрица $\widetilde{A}_2$ скалярна и (18) принимает вид

$$2\alpha_2(\xi_2^2+\xi_3^2-n_2^2-n_3^2)\neq 0\,, \quad \xi_2 n_2+\xi_3 n_3=0\,.$$

Поскольку $\xi_2^2+\xi_3^2=n_2^2+n_3^2=1$, условия (18) нарушены.

В действительности рассмотренные выше случаи сводятся к одному условию $(s,n)\neq 0$.

Покажем сначала, что условия $n_1\neq 0$, $\nu=0$ и $(s,n)\neq 0$ равносильны. Для этого выпишем компоненты векторного произведения $\nu=[A_1 n,n]$ в терминах $s=(s_j)$

$$\nu_1=-n_1[s,n]_1, \quad \nu_2=n_3(s,n)-n_1[s,n]_2\,, \quad \nu_3=-n_2(s,n)-n_1[s,n]_3\,, \tag{19}$$

где $[s,n]_j$, $j=1,2,3$ означают компоненты векторного произведения $[s,n]$. Предположим противное, то есть $(s,n)=0$. Тогда из (19) следует, что $[s,n]_j=0$. Так как $n\in S$, то система равенств $(s,n)=0$, $[s,n]=0$ несовместна. Последнее означает, что $(s,n)\neq 0$.

Обратимся теперь к условию (14). Непосредственной проверкой можно убедиться, что для любого $\xi\in S$ имеет место $(A_1\xi,\xi)=-2\xi_1(s,\xi)+2\alpha_1$. По условию $n_1\neq 0$, так что с учетом предыдущего замечания и выражения для ν_1 в (19), условие (14) перепишем в виде

$$|\nu|^2(s,n)\neq(s_3n_2-s_2n_3)(s,\nu)\,.$$

Последнее неравенство, с учетом того, что $(s,\nu)=(s,n)(s_2n_3-s_3n_2)$, примет вид

$$(s,n)(|\nu|^2+(s_2n_3-s_3n_2)^2)\neq 0\,.$$

По условию $\nu\neq 0$, так что имеем $(s,n)\neq 0$.

Рассмотрим теперь условие (17), которое в наших обозначениях примет вид

$$s_3n_3\neq -s_2n_2,\quad 2s_2n_2n_3=s_3(n_2^2-n_3^2)\,,\quad s_2^2+s_3^2\neq 0,\ n_1=0\,.$$

и покажем, что оно равносильно $(s,n)\neq 0$. Предположим противное, то есть $(s,n)=0$, или $s_2n_2+s_3n_3=0$. Так как по условию компоненты n_2,n_3 одновременно в нуль не обращаются, то можно считать $n_2\neq 0$. Тогда $s_2=-s_3n_3/n_2$ и (17) равносильно $s_2=s_3=0$, что противоречит условию (15). Последнее завершает доказательство теоремы. ■

Литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.И. Бицадзе. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

2. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II // Comm. Pure Appl. Math. – 1964. – 17. – P.35-92.

3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1968. – 432с.

ABOUT THE SHAPIRO-LOPATINSKII CONDITION IN THE RIEMANN-GILBERT PROBLEM OF THE FIRST ORDER ELLIPTIC SYSTEM

V.A. Polunin, A.P. Soldatov

Belgorod State University,

Pobedy st., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: soldatov@bsu.edu.ru

Abstract. The Shapiro-Lopatinski condition of boundary problems is reexamined for the three-dimensional analogue of the Koshi-Riemann system. It is the condition that provides the solvability of the Riemann-Gilbert problem of first-order elliptic systems with partial derivatives and it consists of the additional restriction of the boundary condition matrix. In present work it is obtained the criterion allowing to describe the Shapiro-Lopatinski condition in the explicit form. It is done in terms of the boundary condition matrix and the vector being normal to the boundary surface.

Key words: the problem of Riemann-Gilbert, the condition of Shapiro-Lopatinski, system of Moisil-Theodoresco, elliptic systems, scope problems.

УДК 517.95

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ-НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

С.Л. Хасанова

Стерлитамакская государственная педагогическая академия им. Зайнаб Биишевой,

ул. Николаева, 10, Стерлитамак, Башкортостан, Россия, e-mail: hasanovasl@rambler.ru

Аннотация. Найдены собственные значения для спектральной задачи в области специального вида для уравнения смешанного типа и построена соответствующая система собственных функций. Система собственных функций исследована на полноту в областях эллиптичности, гиперболичности и в целом смешанной области.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение смешанного типа, характеристики, собственные числа, собственные функции, разложение по собственным функциям.

1. Введение

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0, \tag{1}$$

где λ – комплексный параметр, в области D, ограниченной кусочно-гладкой кривой Γ, которая расположена в полуплоскости $y > 0$ с концевыми точками $A(1,0)$ и $B(0,1)$,, а также характеристиками AC $(x+y=0)$ и CB $(x-y=1)$ уравнения (1) при $y<0$.

Обозначим $D_+ = D \cap \{y>0\}$, $D_- = D \cap \{y<0\}$. В области D для уравнения (1) поставим следующую спектральную задачу.

Спектральная задача Трикоми - Неймана (TN_λ). *Найти значения комплексного параметра λ и соответствующие им функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u(x,y) \in \mathrm{C}(\,\overline{D}\,) \cap \mathrm{C}^1(D \cup \Gamma) \cap \mathrm{C}^2(D_+ \cup D_-), \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = 0, \ (x,y) \in \Gamma, \tag{4}$$

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in AC, \tag{5}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial N}$ - *производная по нормали к границе Γ области D_+.*

Ф.И. Франкль [1, 2] обнаружил важные приложения задачи TN в трансзвуковой газодинамике. А.В. Бицадзе [3] исследовал задачу TN для уравнения (1) при $\lambda = 0$. Вострова Л.Е. [4] изучала задачу TN_λ для уравнения (1) при $\lambda = -1$. М.М. Смирнов [5, гл. II, §6] доказал корректность задачи Трикоми-Неймана для уравнения

$$\operatorname{sgn} y \cdot |\, y\,|^m \, u_{xx} + u_{yy} = 0, \; m > 0\,.$$

В настоящей работе найдены собственные значения задачи TN_λ в области D специального вида и построена соответствующая система собственных функций. Найденная система собственных функций исследована на полноту в областях эллиптичности, гиперболичности и в целом смешанной области. Затем на основании системы собственных функций задачи TN_λ построены в виде суммы ряда решение задачи TN для уравнений смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе. Ранее аналогичные исследования по задаче Трикоми, Геллерстедта были проведены в работах Моисеева Е.И. [6], Сабитова К.Б., Карамовой А.А., Кучкаровой А.Н. [7, 8].

Далее спектральная задача TN_λ для уравнения (1) сведена к новой нелокальной спектральной задаче для оператора Лапласа. В случае, когда D_+ является сектором с центром в начале координат, методом разделения переменных, найдены собственные значения и соответствующие им собственные функции задачи TN_λ. Исследован вопрос о полноте системы собственных функций в пространствах $\mathrm{L}_2(\mathrm{D}_+),\ \mathrm{L}_2(\mathrm{D}_-)$ и $\mathrm{L}_2(\mathrm{D})$.

2. Построение системы собственных функций задачи TN_λ и исследование её полноты

Предварительно в области D_- для уравнения (1) построим решения краевой задачи Дарбу.

Задача Дарбу. *Найти в области D_- решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (5) и*

$$u_y(x,0) = \nu(x), \quad 0 < x < 1. \tag{6}$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Если $\nu(x) \in \mathrm{C}^1(0,1) \cap \mathrm{L}_1[0,1]$, то существует единственное решение задачи (1), (5) и (6), и оно определяется формулой*

$$u(x,y) = \int\limits_0^{x+y} \nu(t) J_0 \left[\sqrt{\lambda(x+y-t)(x-y-t)} \right] dt, \tag{7}$$

где $J_0(\cdot)$ – функция Бесселя, $\sqrt{\lambda} > 0$ при $\lambda > 0$.

Доказательство теоремы 1 приведено в [9].

Полагая в формуле (7) $y = 0$ имеем

$$u(x,0) = \int\limits_0^x u_y(t,0) J_0\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right] dt\,, \quad 0 \le x \le 1\,. \tag{8}$$

Таким образом, задача TN_λ сведена к новой нелокальной эллиптической задаче на собственные значения в области D_+: *найти значения параметра λ и соответствующие им собственные функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям (2), (3), (4) и (8).*

В общем случае, то есть когда кривая Γ является произвольной, пока не удается найти решение указанной нелокальной задачи. Поэтому рассмотрим случай, когда область D_+ является сектором с центром в точке A и радиусом $r = 1:\ 0 < \varphi < \varphi_0 \le \pi,\ 0 < r < 1$.

В области D_+ введем полярные координаты: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 < \varphi < \varphi_0$, $0 < r < 1$. В полярных координатах (r,φ), разделяя переменные $u(x,y) = v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, получим:

$$R''(r) + \frac{1}{r}\,R'(r) + \left(\lambda - \frac{\mu^2}{r^2}\right) R(r) = 0\,, \quad 0 < r < 1\,, \tag{9}$$

$$R(0) = 0\,, \quad R^{'}(1) = 0\,, \tag{10}$$

$$\Phi''(\varphi) + \mu^2\Phi(\varphi) = 0\,, \quad 0 < \varphi < \varphi_0\,, \tag{11}$$

$$\Phi^{'}(\varphi_0) = 0\,, \tag{12}$$

$$R(x)\Phi(0) = \Phi'(0)\int\limits_0^x t^{-1}R(t)J_0\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right] dt\,, \quad 0 \le x \le 1\,. \tag{13}$$

Известно, что решением уравнения (9), удовлетворяющим первому условию из (10), является функция Бесселя

$$R(r) = J_\mu(\sqrt{\lambda} r)\,, \quad \operatorname{Re}\mu > 0\,. \tag{14}$$

Подставляя функцию (14) в равенство (13) и вычисляя интеграл по формуле из [10],

$$\int\limits_0^a \frac{1}{x} J_\kappa(ca - cx) J_\nu(cx)dx = \frac{1}{\nu} J_{\kappa+\nu}(ac)\,, \quad a, \operatorname{Re}\nu > 0,\ \operatorname{Re}\kappa > -1\,,$$

что даёт нам второе граничное условие для определения функции $\Phi(\varphi)$

$$\Phi'(0) - \mu\,\Phi(0) = 0\,. \tag{15}$$

Решая краевую задачу (11), (12), (15), найдем

$$\Phi_n(\varphi) = C_n(\cos\mu_n\varphi + \sin\mu_n\varphi)\,, \tag{16}$$

где $C_n = \mathrm{const} \neq 0,\ n = 1, 2, \cdots,$

$$\mu_n = \frac{\pi}{\varphi_0}\left(n - \frac{3}{4}\right)\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{17}$$

Потребовав, чтобы функция (14) удовлетворяла второму условию из (10), имеем

$$\sqrt{\lambda}J'_{\mu_n}(\sqrt{\lambda}) = 0\,. \tag{18}$$

Из теории бесселевых функций [11, с. 798] известно, что функция Бесселя $\sqrt{\lambda}J'_{\mu_n}(z)$ при $\mu_n > -1$ имеет только вещественные нули. Тогда, обозначая через $\alpha_{n,m}$ m – й корень уравнения (18), получим собственные значения задачи TN_λ :

$$\lambda_{n,m} = \alpha^2_{n,m}\,, \quad n, m = 1, 2, \cdots\,. \tag{19}$$

На основании формул (14), (16), (19), найдем собственные функции задачи TN_λ в области D_+ :

$$u_{n,m}(x, y) = v_{n,m}(r, \varphi) = c_{n,m}J_{\mu_n}(\alpha_{n,m}r)(\cos\mu_n\varphi + \sin\mu_n\varphi)\,. \tag{20}$$

Для построения собственных функций в области D_- можно воспользоваться формулой (7), но из-за громоздкости такого подхода воспользуемся методом, предложенным в [12]. Для этого в области D_- введем новые переменные

$$\sigma = \sqrt{x^2 - y^2},\ \ \theta = -\frac{y^2}{x^2 - y^2}\,.$$

Тогда в координатах (σ, θ) уравнение (1) принимает вид:

$$4\theta(1-\theta)u_{\theta\theta} + 4\left(\frac{1}{2} - \theta\right)u_\theta + \sigma^2 u_{\sigma\sigma} + \sigma u_\sigma + \lambda\sigma^2 u = 0\,.$$

Разделяя переменные $u(\sigma, \theta) = Q(\theta)P(\sigma)$, получим:

$$P''(\sigma) + \frac{1}{\sigma}P'(\sigma) + \left(\lambda - \frac{\rho^2}{\sigma^2}\right)P(\sigma) = 0\,, \quad 0 < \sigma < 1\,, \tag{21}$$

$$\theta(1-\theta)Q''(\theta) + \left(\frac{1}{2} - \theta\right)Q'(\theta) + \rho^2 Q(\theta) = 0\,, \tag{22}$$

Решением уравнения (21) является функция

$$P(\sigma) = J_\rho(\sqrt{\lambda}\sigma)\,, \quad \mathrm{Re}\,\rho > 0\,. \tag{23}$$

Уравнение (22) является гипергергеометрическим уравнением [13, с. 69]. Его общее решение определяется формулой

$$Q(\theta) = k_1(1-\theta)^{\rho/2}\mathrm{F}\left(\frac{1-\rho}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{\theta}{\theta-1}\right) +$$

$$+ k_2(1-\theta)^{-\rho/2}\mathrm{F}\left(\frac{\rho}{2}, \frac{1+\rho}{2}, 1+\rho; \frac{1}{1-\theta}\right) . \tag{24}$$

На основании известных формул [13, с. 110] равенству (24) придадим более простой вид

$$Q(\theta) = k_1\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\rho/2} + k_2\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\rho/2}, \tag{25}$$

Тогда, в силу (23) и (25), находим семейство решений уравнения (1) в области D_-

$$u(x,y) = Q(\sigma)P(\theta) = \left[k_1\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\rho/2} + k_2\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\rho/2}\right] J_\rho\left[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\right], \tag{26}$$

где $\operatorname{Re}\rho \geqslant 0$, k_1 и k_2 – произвольные постоянные.

Из формулы (20) вычислим:

$$\tau_{n,m}(x) = u_{n,m}(x,0) = c_{n,m}J_{\mu_n}(\alpha_{n,m}x)\,, \tag{27}$$

$$\nu_{n,m}(x) = \frac{\partial}{\partial y}u_{n,m}(x,0) = c_{n,m}\mu_n x^{-1}J_{\mu_n}(\alpha_{n,m}x)\,. \tag{28}$$

Если в формуле (26) положить $\rho = \mu_n$, $\lambda = \alpha^2_{n,m}$, $k_1 = 0$, $k_2 = c_{n,m}$, то она определит решение задачи Коши для уравнения (1) в области D_- с краевыми условиями (27) и (28). Следовательно, система собственных функций задачи TN_λ в области D_- имеет вид

$$u_{n,m}(x,y) = c_{n,m}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2} J_{\mu_n}\left[\sqrt{\lambda_{n,m}(x^2-y^2)}\right] . \tag{29}$$

Таким образом, объединяя формулы (20) и (29), получим систему собственных функций задачи T_λ в области D

$$u_{n,m}(x,y) =$$

$$= \begin{cases} c_{n,m}J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda_{n,m}(x^2+y^2)}\right)(\cos\mu_n\varphi + \sin\mu_n\varphi)\,, & (x,y)\in D_+\,, \\ c_{n,m}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2} J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda_{n,m}(x^2-y^2)}\right), & (x,y)\in D_-\,. \end{cases} \tag{30}$$

Теорема 2. *Система собственных функций* (30) *задачи* TN_λ *полна в* $\mathrm{L}_2(D_+)$.

□ Допустим, что в $L_2(D_+)$ существует функция $F(x,y)$ такая, что

$$\iint\limits_{D_+} F(x,y)u_{n,m}(x,y)dxdy = 0 \tag{31}$$

для всех $n, m = 1, 2, \ldots$. Покажем, что $F(x,y) = 0$ почти всюду в D_+. В интеграле (31) перейдем к полярной системе координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда, с учётом (30), получим

$$0 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\varphi_0} f(r,\varphi) J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}r\right)(\cos\mu_n\varphi + \sin\mu_n\varphi) r d\varphi dr =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_0^1 \int\limits_0^{\varphi_0} f(r,\varphi) J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}r\right)\sin\left(\mu_n\varphi + \frac{\pi}{4}\right) r d\varphi dr\,.$$

Произведем замену $\varphi = \dfrac{\varphi_0}{\pi}\theta$. Тогда, полагая $f(r,\varphi) = f(r,\varphi_0\theta/\pi) = g(r,\theta)$, $\lambda_n = n - 3/4$, получим

$$\sqrt{2}\int\limits_0^1 \int\limits_0^{\varphi_0} f(r,\varphi) J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}r\right)\sin\left(\mu_n\varphi + \frac{\pi}{4}\right) r d\varphi dr =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\varphi_0}{\pi}\int\limits_0^1 \int\limits_0^{\pi} g(r,\theta) J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}r\right)\sin\left(\lambda_n\theta + \frac{\pi}{4}\right) r d\theta dr =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\varphi_0}{\pi}\int\limits_0^1 F_n(r) J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}r\right) r dr = 0\,, \tag{32}$$

где

$$F_n(r) = \int\limits_0^{\pi} g(r,\theta)\sin\left(\lambda_n\theta + \frac{\pi}{4}\right) d\theta\,.$$

Из (32) имеем, что для функции $F_n(r)$ все коэффициенты ряда Фурье-Бесселя равны нулю, поэтому из теоремы Юнга [11] следует, что $F_n(r) \equiv 0$, $(n = 1, 2, \ldots)$, если интеграл $\int_0^1 \sqrt{r}|F_n(r)|dr$ существует и абсолютно сходится. В самом деле, из неравенства Коши-Буняковского

$$\int\limits_0^1 \sqrt{r}|F_n(r)|dr \leqslant \left(\int\limits_0^1 r dr \cdot \int\limits_0^1 \left|\int\limits_0^{\pi} g(r,\theta)\sin(\lambda_n\theta + \pi/4)d\theta\right|^2 dr\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{\sqrt{2}\varphi_0}\sqrt{\int\limits_0^{\pi}\sin^2(\lambda_n\theta + \frac{\pi}{4})d\theta} \cdot \sqrt{\int\limits_0^1\int\limits_0^{\pi} g^2(r,\theta)d\theta dr} =$$

$$= C\|F\|_{L_2(D_+)} < +\infty\,, \quad C = \mathrm{const} > 0,$$

получается, что имеет место соотношение

$$\int\limits_0^\pi g(r,\theta)\sin(\lambda_n\theta + \pi/4)d\theta = 0 \tag{33}$$

для всех $n = 1, 2, \cdots$ при любом $r \in (0, 1)$. Из результатов [14] следует также, что система синусов $\{\sin(\lambda_n\theta+\pi/4)\}$ образует базис в $\mathrm{L}_2(0,\pi)$. Тогда система функций $\{\sin(\lambda_n\theta + \pi/4)\}$ полна в $\mathrm{L}_2(0,\pi)$. Поэтому из (33) получаем, что при каждом r множество тех θ, где $g(r,\theta) \neq 0$, имеет меру нуль. В силу теоремы Фубини это означает, что $g(r,\theta) = 0$ почти всюду в D_+. ■

Теорема 3. *Если* $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$, *то система собственных функций* (30) *задачи* TN_λ *полна в* $\mathrm{L}_2(D_-)$. *Если* $\varphi_0 \in [\pi/2, \pi]$, *то подсистема системы собственных функций*(30) *задачи* TN_λ, *начиная с номера* $n = 2, 3, \dots$, *полна в* $\mathrm{L}_2(D_-)$.

□ Допустим, что существует функция $F(x, y) \in \mathrm{L}_2(D_-)$ такая, что

$$\iint\limits_D F(x,y)u_{n,m}(x,y)dxdy = 0 \tag{34}$$

для всех $n, m = 1, 2, \dots$. Покажем, что $F(x, y) = 0$ почти всюду в D_-. Произведём в (34) замену переменных $2x = \xi + \eta$, $2y = \xi - \eta$. Тогда область D_- перейдет в область $\Delta = \{(\xi,\eta)|\ 0 < \xi < \eta < 1\}$, а интеграл (34) запишется в виде

$$\iint\limits_\Delta f(\xi,\eta)v_{n,m}(\xi,\eta)d\xi d\eta = 0\,, \tag{35}$$

где $f(\xi,\eta) = F(x,y)$, $v_{n,m}(\xi,\eta) = u_{n,m}(x,y)$. Учитывая (30), преобразуем интеграл (35)

$$0 = \int\limits_0^1 d\eta \int\limits_0^\eta f(\xi,\eta)\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{\mu_n/2} J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}\xi\eta})d\xi\,.$$

Полагая во внутреннем интеграле $\xi = \eta t$ и меняя порядок интегрирования, получим:

$$0 = \int\limits_0^1 t^{\mu_n/2}dt \int\limits_0^1 f(\eta t,\eta)J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}\eta^2 t})\eta d\eta\,.$$

Затем, заменяя $\eta\sqrt{t} = r$, $t = s^2$, и меняя порядок интегрирования, запишем

$$0 = \int\limits_0^1 J_{\mu_n}\left(r\sqrt{\lambda_{n,m}}\right) rdr \int\limits_r^1 s^{\mu_n - 1} f(rs, r/s)ds\,.$$

Из последнего равенства имеем, что для функции

$$F_n(r) = \int\limits_r^1 f(rs, r/s)s^{\mu_n - 1}ds\,, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1\,,\ n \in \mathrm{N}\,,$$

все коэффициенты ряда Фурье-Бесселя равны нулю. Поэтому из теоремы Юнга следует, что

$$\int\limits_r^1 f(rs, r/s)s^{\mu_n - 1}ds = 0$$

для всех $n \in \mathrm{N}$ при каждом $r \in [0, 1]$.

Рассмотрим систему функций $\{s^{\mu_n - 1}\}$. По теореме Мюнца условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k} = \infty\,, \quad -\frac{1}{p} < m_1 < m_2 < \ldots\,,$$

необходимо и достаточно для полноты $\{x_k^m\}_{k=1}^{\infty}$ в $\mathrm{L_p[a, b]}$, $a \geq 0$, $p > 1$. В нашем случае при $p = 2$, $m_k = \mu_k - 1$ необходимым и достаточным условием полноты системы функций $\{s^{\mu_n - 1}\}_{n=1}^{\infty}$ является условие $\mu_1 - 1 > -1/2$. Поскольку $\mu_n = \dfrac{\pi}{\varphi_0}(n - 3/4)$, то система $\{s^{\mu_n - 1}\}_{n=1}^{\infty}$ полна в L_2 при $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$. Если же $\varphi_0 \in [\pi/2, \pi]$, то подсистема системы $\{s^{\mu_n - 1}\}_{n=2}^{\infty}$ полна в L_2. Тогда, в силу этой полноты, имеем, что при каждом r множество тех s, где $f(rs, r/s) \neq 0$, имеет меру нуль. В силу теоремы Фубини это означает, что $f(rs, r/s) = 0$ почти всюду в $D_-^* = \{(s, r) :\ r < s < 1,\ 0 < r < 1\}$, и, стало быть, и в области D_-. ■

Теорема 4. *Система собственных функций* (30) *задачи* TN_λ *не полна в* $\mathrm{L}_2(D)$.

□ В области D рассмотрим функцию

$$F(x, y) = \begin{cases} F_1(x, y), & (x, y) \in D_+, \\ F_2(x, y), & (x, y) \in D_- \end{cases}$$

из $\mathrm{L}_2(D)$ и интеграл

$$J = \iint\limits_D F(x, y)u_{n,m}(x, y)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_+} F_1(x, y)u_{n,m}(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_-} F_2(x, y)u_{n,m}(x, y)dxdy = i_1 + i_2\,. \tag{36}$$

В интеграле i_1, переходя к полярным координатам $\left(r, \dfrac{\varphi_0}{\pi}\theta\right)$, получим

$$i_1 = \frac{\sqrt{2}\varphi_0}{\pi} c_{n,m} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\pi} f_1\left(r, \frac{\varphi_0}{\pi}\theta\right) J_{\mu_n}\left(r\sqrt{\lambda_{n,m}}\right) \sin\left(\lambda_n\theta + \frac{\pi}{4}\right) rd\theta dr =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\varphi_0}{\pi} c_{n,m} \int\limits_0^1 J_{\mu_n}\left(r\sqrt{\lambda_{n,m}}\right) r dr \int\limits_0^\pi f_1\left(r, \frac{\varphi_0}{\pi}\theta\right) \sin(\lambda_n\theta + \pi/4) d\theta\,, \tag{37}$$

где $\lambda_n = n - \dfrac{3}{4}$; $n = 1, 2, \dots$, $f_1\left(r, \dfrac{\varphi_0}{\pi}\theta\right) = F_1(x, y)$. Интеграл i_2 преобразуем к виду

$$i_2 = c_{n,m} \int\limits_0^1 J_{\mu_n}\left(r\sqrt{\lambda_{n,m}}\right) r dr \int\limits_r^1 s^{\mu_n - 1} f_2(rs, r/s) ds\,, \tag{38}$$

где $f_2(\xi, \eta) = F_2(x, y)$. Теперь, подставляя (37) и (38) в (36), получим

$$J = c_{n,m} \int\limits_0^1 J_{\mu_n}\left(r\sqrt{\lambda_{n,m}}\right) r \times$$

$$\times \left[\frac{\sqrt{2}\varphi_0}{\pi} \int\limits_0^\pi f_1\left(r, \frac{\varphi_0}{\pi}\theta\right) \sin(\lambda_n\theta + \pi/4) d\theta + + \int\limits_r^1 s^{\mu_n - 1} f_2(rs, r/s) ds\right] dr\,. \tag{39}$$

Следуя [12], рассмотрим функции

$$f_1\left(r, \frac{\varphi_0}{\pi}\theta\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}\varphi_0} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{r^{\mu_k}}{\mu_k} - \frac{r^{\mu_k + 1}}{\mu_k + 1} - \frac{1}{\mu_k(\mu_k + 1)}\right] h_k(\varphi)\,, \tag{40}$$

$$f_2(rs, r/s) = 1 - s\,, \tag{41}$$

где $h_k(\varphi)$ – биортогональная система относительно системы синусов $\sin(\lambda_n\theta + \pi/4)$, $n = 1, 2, \dots$, и она имеет вид [14]

$$h_k(\theta) = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos(\theta/2))^{-1}}{(\mathrm{tg}(\theta/2))^{1/2}} \sum_{n=1}^{k} \mathrm{B}_{r-n} \sin(n\theta)\,, \tag{42}$$

$$\mathrm{B}_l = \sum_{m=0}^{l} C_{1/2}^{l-m} C_{1/2}^{m} (-1)^{l-m}\,, \quad B_l^n = \frac{l(l-1)\dots(l-n+1)}{n!}\,.$$

Поскольку $h_k(\varphi)$ равномерно ограничена по k [14], ряд (40) при любом $r \le 1$ сходится равномерно. Подставляя функции (40), (41) в (39), получим, что существует функция $F(x, y) \in \mathrm{L}_2(D)$ и $F(x, y) \ne 0$ в D такая, что интеграл $J = 0$. Теорема 4 доказана. ■

Литература

1. Франкль Ф.И. К теории сопел Лаваля // Изв. АН СССР, Сер.: Математика. – 1945. – 9,5. – С.387-422.

2. Франкль Ф.И. К теории уравнения $yZ_{xx} + Z_{yy} = 0$ // Изв. РАН СССР, Сер.: Математика. – 1946. – 10,2. – С.135-166.

3. Бицадзе А.В. О некоторых задачах для уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. – 1950. – 70,4. – С.561-564.

4. Вострова Л.Е. Смешанная краевая задача для уравнения $u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} - u = 0$ // Ученые записки Куйб. гос. пед. ин-та. – 1958. – 21. – С.219-267.

5. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа / М.М. Смирнов. – М.: Наука, 1970. – 296 с.

6. Моисеев Е.И. Решение задачи Трикоми в специальных областях // Дифференц. уравнения. – 1992. – 26,1. – С.93-103.

7. Сабитов К.Б., Карамова А.А. Спектральные свойства решений задачи Трикоми для уравнений смешанного типа с двумя линиями изменения типа и их применения // Изв. АН, сер. Матем. – 2001. – 65,4. – С.133-150.

8. Сабитов К.Б., Кучкарова А.Н. Спектральные свойства решения задачи Геллерстедта для уравнений смешанного типа и их применение // Сибирский мат. журнал. – 2001. – 42,5. – С.1147-1161.

9. Сабитов К.Б. Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений I // Дифференц. уравнения. – 1990. – 26,6. – С.1023-1032.

10. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 752 с.

11. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций I / Г.Н. Ватсон. – М.: ИЛ, 1949. – 728 с.

12. Сабитов К.Б., Тихомиров В.В. О построении собственных значений и функций одной газодинамической задачи Франкля // Матем. моделирование. – 1990. – 2,10. – С.100-109.

13. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1965. – Т.2. – 294 с.

14. Моисеев Е.И. О базисности одной системы синусов // Дифференц. уравнения. – 1987. – 23,1. – С.177-179.

SPECTRAL PROPERTIES OF THE TRICOMI-NEUMANN PROBLEM SOLUTION OF THE MIXED TYPE EQUATION AND THEIR APPLICATIONS

S.L. Hasanova

Zainab Biishev Stelitamak State Pedagogical Academy,

Nokolayeva St., 10, Stelitamak, Bashkortostan, Russia, e-mail: hasanovasl@rambler.ru

Abstract. The spectral problem for the differential equation of mixed type in the special domain is studied. Its eigenfunctions are found. It is proved that the eigenfunction system is complete in the elliptic domain and the hyperbolic one. It is also fulfilled in the whole domain.

Key words: differential equation of mixed type, characteristics, eigenvalues, eigenfunctions, eigenseries.

УДК 517.956

ВЗАИМНО-СОПРЯЖЁННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЧАПЛЫГИНА

Т.Т. Шерияздан

Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова,

пр. Абылхайырхана, Актобе, 030000, Казахстан, e-mail: talgatsher72@inbox.ru

Аннотация. В работе исследованы взаимно-сопряженные краевые задачи с отходом от характеристики для многомерного уравнения Чаплыгина.

Ключевые слова: краевая задача, сферические функции, характеристика, многомерные уравнения.

При исследовании смешанной задачи M в [1,2], для уравнения колебания струны изучалась краевая задача с отходом от характеристики, где обращено внимание на важность исследования таких задач для гиперболических уравнений. Для вырождающихся гиперболических уравнений эта задача на плоскости рассмотрена в [3,4]. Однако, многомерные задачи с отходом от характеристики не изучены.

1. Постановка задач и результаты

Пусть D_β – конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная плоскостью $t = 0$ и при $t > 0$ коническими поверхностями

$$K_0: \quad r = \int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi\,, \quad 0 \le r \le r_0\,, \quad 0 < r_0 = \text{const} < \frac{1}{2}\,,$$

$$K_\beta: \qquad \beta(r - r_0) + r_0 = \int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi\,, \quad r_0 \le r \le r_1\,,$$

$$K_1: \qquad r = 1 - \int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi\,, \quad 0 \le t \le t_0\,, \quad r_1 \le r \le 1\,,$$

где $r = |x|$ – длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$, а $0 < \beta = \text{const} < 1$, $r_1 = \dfrac{(1 - r_0 + r_0\beta)}{(1+\beta)}$, $t_0 : \dfrac{1}{2} = \displaystyle\int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β, обозначим через S, S_0, S_β, S_1 соответственно.

В области D_β рассмотрим многомерное уравнение Чаплыгина

$$Lu \equiv g(t)\Delta_x u - u_{tt} = 0\,, \tag{1}$$

где $g(t) > 0$ при $t > 0$ и $g(0) = 0$, $g(t) \in C([0,t_0]) \cap C^2((0,t_0))$, Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \geq 2$.

В качестве многомерных аналогов краевых задач с отходом от характеристики рассмотрим следующие

Задача 1. Найти в области D_β решение уравнения (1) из класса $C(\bar{D}_\beta \cap C^2(D_\beta))$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_S = \tau(x)\,, \quad u|_{S_0} = \sigma_0(x)\,, \quad u|_{S_\beta} = \sigma_\beta(x)\,, \tag{2}$$

или

$$u_t|_S = \tau(x)\,, \quad u|_{S_0} = \sigma_0(x)\,, \quad u|_{S_\beta} = \sigma_\beta(x)\,. \tag{3}$$

Задача 2. Найти в области D_β решение уравнения (1) из класса $C(\bar{D}_\beta \cap C^2(D_\beta))$, удовлетворяющее краевым условиям

$$v|_S = \tau(x)\,, \quad v|_{S_\beta} = \sigma_\beta(x)\,, \quad u|_{S_1} = \sigma_1(x)\,, \tag{4}$$

или

$$v_t|_S = \tau(x)\,, \quad v|_{S_\beta} = \sigma_\beta(x)\,, \quad u|_{S_1} = \sigma_1(x)\,. \tag{5}$$

Как отмечено в [4] сформулированные задачи возникают при исследовании трансзвуковых проблем.

В дальнейшем, нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, ..., m-1$.

Пусть Ω – проекция области D на плоскость (r,t) с границами

$$\Gamma \; : \; t = 0\,, \quad 0 \leq r \leq 1\,,$$

$$\Gamma_0 \; : \; r = \int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi\,, \quad 0 \leq r \leq r_0\,,$$

$$\Gamma_\beta \; : \; \beta(r - r_0) + r_0 = \int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi\,, \quad r_0 \leq r \leq r_1\,,$$

$$\Gamma_1 \; : \; r = 1 - \int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi\,, \quad 0 \leq t \leq t_0\,, \quad r_1 \leq r \leq 1\,;$$

$\{Y^k_{n,m}(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$, $W^l_2(S)$, $l = 0, 1, ...$ – пространства Соболева.

Имеет место (см. [5])

Лемма. *Пусть $f(r,\theta) \in W^l_2(S)$. Если $l \geqslant m-1$. Функция $f(r,\theta)$ представляется рядом*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f^k_n(r) Y^k_{n,m}(\theta)\,. \tag{6}$$

Этот ряд, а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leqslant l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Через $\bar{\tau}^k_n(r)$, $\bar{\nu}^k_n(r)$, $\bar{\sigma}^k_{0n}(r)$, $\bar{\sigma}^k_{\beta n}(r)$, обозначим коэффициенты разложения ряда (6) соответственно функций $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, $\sigma_0(r,\theta)$, $\sigma_\beta(r,\theta)$.

Введём множество функций

$$B^l(S) = \Bigg\{ f(r,\theta)\ :\ f \in W^l_2(S),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left(\|f^k_n(r)\|^2_{C^2((0,1))} + \|f^k_n(r)\|^2_{C([0,1])}\right)\exp 2(n^2+n(m-2)) < \infty\,, \quad l > m-1 \Bigg\}\,.$$

Пусть $\tau(r,\theta) = r^3\tau^*(r,\theta)$, $\nu(r,\theta) = r^3\nu^*(r,\theta)$, $\sigma_0(r,\theta) = r^2\sigma^*_0(r,\theta)$, $\tau^*(r,\theta)$, $\nu^*(r,\theta) \in B^l(S)$, $\sigma^*_0(r,\theta) \in B^l(S_0)$, $\sigma^*_\beta(r,\theta) \in B^l(S_\beta)$.

Тогда справедливы:

Теорема 1. *Задача 1 имеет бесчисленное множество решений.*

Теорема 2. *В классе $C(\bar{D}_\beta \cap C^2(D_\beta))$ решение задачи 2 единственно.*

2. Доказательство теоремы 1

Сначала рассмотрим задачу (1), (2). В сферических координатах уравнение 1 имеет вид [5]

$$g(t)u_{rr} + \frac{m-1}{r}g(t)u_r - \frac{g(t)}{r^2}\delta u - u_{tt} = 0\,, \tag{7}$$

где

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j\sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right)\,, \quad g_1 = 1\,, \quad g_j = (\sin\theta_1 ... \sin\theta_{j-1})^2\,,\ j > 1\,.$$

Искомое решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta)\,, \tag{8}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ – функции, подлежащие определению. Подставляя (8) в (7), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ (см. [5]), получим

$$g(t)\bar{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}g(t)\bar{u}_{nr}^k-\bar{u}_{ntt}^k-\frac{\lambda_n g(t)}{r^2}\,\bar{u}_n^k=0\,,\quad \lambda_n=n(n+m-2),\ k=\overline{1,k_n}\,,\ n=0,1,\ldots. \tag{9}$$

При этом краевые условия (2),(3), с учетом утверждения леммы, соответственно запишутся в виде

$$\begin{gathered}\bar{u}_n^k|_{\Gamma}=\bar{\tau}_n^k(r)\,,\quad 0\le r\le 1\,,\qquad \bar{u}_n^k|_{\Gamma_0}=\bar{\sigma}_{0n}^k(r)\,,\ 0\le r\le r_0\,,\\ \bar{u}_n^k|_{\Gamma_\beta}=\bar{\sigma}_{\beta n}^k(r)\,,\ 0\le r\le r_1\,,\qquad k=\overline{1,k_n}\,,\ n=0,1,\ldots;\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\bar{u}_{nt}^k|_{\Gamma}=\bar{\nu}_n^k(r)\,,\quad 0\le r\le 1\,,\quad \bar{u}_n^k|_{\Gamma_0}=\bar{\sigma}_{0n}^k(r),\ 0\le r\le r_0\,,\\ \bar{u}_n^k|_{\Gamma_\beta}=\bar{\sigma}_{\beta n}^k(r)\,,\ 0\le r\le r_1\,,\ k=\overline{1,k_n}\,,\ n=0,1,\ldots.\end{gathered} \tag{11}$$

Произведя в (9) замену переменных $\bar{u}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}u_n^k(r,t)$ и положив затем $r=r$, $y=\left(\frac{3}{2}\int\limits_0^t\sqrt{g(\xi)}d\xi\right)^{\frac{2}{3}}$, получим

$$yu_{nrr}^k-u_{nyy}^k+\frac{\overline{\lambda}_n y}{r^2}\,u_n^k-b(y)u_{ny}^k=0\,, \tag{12}$$

$$\overline{\lambda}_n=\frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4},\qquad b(y)=\frac{1}{2g}\left[\frac{dg}{dy}-\frac{g}{y}\right].$$

Полагая $u_n^k=\omega_n^k\exp\left[-\frac{1}{2}\int\limits_0^y b(\xi)d\xi\right]$, уравнение (12) приводим к виду

$$y\omega_{nrr}^k-\omega_{nyy}^k+\frac{\overline{\lambda}_n y}{r^2}\,\omega_n^k=c(y)\omega_n^k\,, \tag{13}$$

$$c(y)=-\frac{1}{4}(b^2+2b'_y)\in C(y>0)\,.$$

Уравнение (13), в свою очередь, с помощью замены переменных $r=r$, $x_0=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$ переходит в уравнение

$$\omega_{nrr}^k-\omega_{nx_0x_0}^k-\frac{1}{3x_0}\,\omega_{nx_0}^k+\frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\,\omega_n^k=g_n^k(r,x_0)\,, \tag{14}$$

$$g_n^k(r,x_0)=\left(\frac{3x_0}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}c\left[\left(\frac{3x_0}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\omega_n^k\left(r,\left(\frac{3x_0}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right).$$

При этом краевые условия (10), (11) запишутся в виде

$$\begin{gathered}\omega_n^k(r,0)=\tau_n^k(r)\,,\qquad\qquad \omega_n^k(r,r)=\sigma_{0n}^k(r)\,,\\ \omega_n^k(r,\beta(r-r_0)+r_0)=\sigma_{\beta n}^k(r)\,,\quad k=\overline{1,k_n}\,,\ n=0,1,...,\quad 0\leqslant r\leqslant 1\,;\end{gathered}\tag{15}$$

$$\begin{gathered}\lim_{x_0\to 0}x_0^{1/3}\frac{\partial}{\partial x_0}w_n^k=\nu_n^k(r)\,,\ 0<r<1,\ \ \omega_n^k(r,r)=\sigma_{0n}^k(r)\,,\\ \omega_n^k(r,\beta(r-r_0)+r_0)=\sigma_{\beta n}^k(r)\,,\qquad k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\dots,\ 0\leqslant r\leqslant 1\,;\end{gathered}\tag{16}$$

$$\tau_n^k(r)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\,\overline{\tau}_n^k(r)\,,\quad \nu_n^k(r)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\,\overline{\nu}_n^k(r)\,,$$

$$\sigma_{0n}^k(r)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\,\overline{\sigma}_{\beta n}^k(r)\,,\quad \sigma_{0n}^k(r)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\,\overline{\sigma}_{\beta n}^k(r)\,.$$

Наряду с уравнением (14) рассмотрим уравнение

$$L_\alpha\omega_{\alpha,n}^k\equiv\omega_{\alpha,nrr}^k-\omega_{\alpha,nx_0x_0}^k-\frac{\alpha}{x_0}\,\omega_{\alpha,nx_0}^k+\frac{\bar\lambda_n}{r^2}\,\omega_{\alpha,n}^k=g_{\alpha,n}^k(r,x_0)\,,\tag{17a}$$

$$L_0\omega_{0,n}^k\equiv\omega_{0,nrr}^k-\omega_{0,nx_0x_0}^k+\frac{\bar\lambda_n}{r^2}\,\omega_{0,n}^k=g_{0,n}^k(r,x_0)\,,\tag{17b}$$

$$g_{\alpha,n}^k(r,x_0)=\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{-2\alpha}c\left[\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right]\omega_{\alpha,n}^k\left[r,\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right],$$

$$g_{0,n}^k(r,x_0)=c\,(x_0)\,\omega_{0,n}^k\,(r,x_0)\ ,\quad 0<\alpha=\mathrm{const}<1\,.$$

Уравнение (14) совпадает с (17a) при $\alpha=\frac{1}{3}$.

Как показано в [6, 7], имеет место следующая функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (17a) и (17b).

Утверждение 1. *Если $\omega_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$ – решение задачи Коши для уравнения (17b), удовлетворяющее условию*

$$\omega_{0,n}^{k,1}(r,0)=\tau_n^k(r),\quad \frac{\partial}{\partial x_0}\,\omega_{0,n}^{k,1}(r,0)=0,\tag{18}$$

то функция

$$\omega_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)=\gamma_\alpha\int\limits_0^1\omega_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}d\xi\equiv\frac{\gamma_\alpha}{2}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)D_{0x_0^2}^{-\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{\omega_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0^2}\right]\tag{19}$$

при $\alpha > 0$ *есть решение уравнения* (17*a*) *с условиями* (18).

Утверждение 2. *Если* $\omega_{0,n}^{k,1}(r, x_0)$ *является решением задачи Коши для уравнения* (17_0), *удовлетворяющее условиям*

$$\omega_{0,n}^{k,1}(r,0) = \frac{v_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)...(2q+1-\alpha)}, \quad \frac{\partial}{\partial x_0}\,\omega_{0,n}^{k,1}(r,0) = 0\,, \tag{18a}$$

то при $0 < \alpha < 1$ *функция*

$$\omega_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0) = \gamma_{2-k+2q}\left(\frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^q \left[x_0^{1-\alpha+2q}\int\limits_0^1 \omega_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)(1-\xi^2)^{q-\frac{\alpha}{2}}d\xi\right] \equiv$$

$$\equiv \gamma_{2-k+2q}2^{q-1}\Gamma\left(q-\frac{\alpha}{2}+1\right)D_{0x_0^2}^{\frac{\alpha}{2}-1}\left[\frac{\omega_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0}\right]$$

является решением уравнения (17*a*) *с начальными данными*

$$\omega_{\alpha,n}^{k,2}(r,0) = 0, \quad \lim_{x_0\to 0} x_0^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_0}\,\omega_{\alpha,n}^{k,2} = \nu_n^k(r), \tag{20}$$

где $\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{\alpha}{2})\gamma_\alpha = 2\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция, D_{ot}^{α} – оператор Римана-Лиувилля (см. [8]), а $q \geqslant 0$ – наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $2-\alpha+2q \geqslant m-1$. При этом функции $g_{\alpha,n}^k(r,x_0)$, $g_{0,n}^k(r,x_0)$ связаны формулами (19) в случае утверждения 1 и (20) в случае утверждения 2.

Сначала рассмотрим задачи (17*b*), (15) и (17*b*), (16), где первое условие заменено условием $\dfrac{\partial}{\partial x_0}\,w_n^k = \nu_n^k(r)$. Произведя замену переменной по формуле $\xi = \dfrac{(r+x_0)}{2}$, $\eta = \dfrac{(r-x_0)}{2}$, эти задачи запишем в виде:

$$Lv_n^k = v_{n\xi\eta}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{(\xi+\eta)^2}v_n^k = c(\xi-\eta)v_n^k(\xi,\eta)\,, \tag{22}$$

$$\begin{gathered} v_n^k(\xi,\xi) = \tau_n^k(\xi)\,,\ 0\le\xi\le\tfrac{1}{2}\,, \qquad\qquad v_n^k(\xi,0) = \sigma_{0n}^k(\xi)\,,\ 0\le\xi\le\xi_0 = r_0\,, \\ v_n^k(\xi,\gamma(\xi-\xi_0)) = \sigma_{\beta n}^k(\xi)\,,\ \xi_0\le\xi\le\tfrac{1}{2}\,,\quad k=\overline{1,k_n}\,,\ n=0,1,...\,; \end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial v_n^k}{\partial\xi} - \frac{\partial v_n^k}{\partial\eta}\right)|_{\xi=\eta} = \nu_n^k(\xi)\,, \qquad\qquad v_n^k(\xi,0) = \sigma_{0n}^k(\xi)\,,\ 0\le\xi\le\xi_0\,, \\ v_n^k(\xi,\gamma(\xi-\xi_0)) = \sigma_{\beta n}^k(\xi)\,,\ \xi_0\le\xi\le\tfrac{1}{2}\,,\quad k=\overline{1,k_n}\,,\ n=0,1,...\,; \end{gathered} \tag{24}$$

$$v_n^k(\xi,\eta) = w_{0,n}^k(\xi+\eta,\xi-\eta)\,,\quad \tau_n^k(\xi) = (2\xi)^{\frac{m-1}{2}}\overline{\tau}_n^k(2\xi)\,,\quad \sigma_{0n}^k(\xi) = \xi^{\frac{m-1}{2}}\,\overline{\sigma}_{0n}^k(\xi)\,,$$

$$\nu_n^k(\xi)=\sqrt{2}(2\xi)^{\frac{m-1}{2}}\,\overline{\nu}_n^k(2\xi)\,,\quad \sigma_{\beta n}^k(\xi)=((1+\gamma)\xi-\gamma\xi_0)^{\frac{m-1}{2}}\,\overline{\sigma}_{\beta n}^k((1+\gamma)\xi-\gamma\xi_0)\,,$$

$$0<\gamma=\frac{1-\beta}{1+\beta}<1\,.$$

Аналогично, как в [7,9], можно записать решение задачи Коши для уравнения (22) следующим образом:

$$v_n^k(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\,\tau_n^k(\eta)R(\eta,\eta;\xi,\eta)+\frac{1}{2}\,\tau_n^k(\xi)R(\xi,\xi;\xi,\eta)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\eta}^{\xi}\left[\nu_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta)-\tau_n^k(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}\,R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\mid_{\xi_1=\eta_1}\right]d\xi_1+ \tag{25}$$

$$+\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\int\limits_{0}^{\eta}c(\xi_1-\eta_1)v_n^k(\xi_1,\eta_1)R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\,d\xi_1d\eta_1\,,\ 0\le\eta<\xi\le\xi_0\,,$$

$$v_n^k(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\,\tau_n^k(\eta)R(\eta,\eta;\xi,\eta)+\frac{1}{2}\,\tau_n^k(\xi)R(\xi,\xi;\xi,\eta)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\eta}^{\xi}\left[\nu_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta)-\tau_n^k(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\mid_{\xi_1=\eta_1}\right]d\xi_1+ \tag{26}$$

$$+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\xi}\int\limits_{\gamma(\xi-\xi_0)}^{\eta}c(\xi_1-\eta_1)v_n^k(\xi_1,\eta_1)R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\,d\xi_1d\eta_1\,,\quad \xi_0\le\xi\le\frac{1}{2}\,,\ 0\le\eta\le\frac{1}{2}\,,$$

где $R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)=P_\mu\left[\dfrac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi_1\eta_1+\xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\right]$ – функция Римана уравнения $Lv_n^k=0$ (см. [10]), $P_\mu(z)$ – функция Лежандра, $\mu=n+\dfrac{(m-3)}{2}$, а

$$\left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial N}\right)_{\xi_1=\eta_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial\xi_1}-\frac{\partial(\cdot)}{\partial\eta_1}\right)_{\xi_1=\eta_1}\,.$$

Из (25), (26) при $\eta=0$, и $\eta=\gamma(\xi-\xi_0)$, используя краевое условие (23), соответственно получим интегральные уравнения первого рода

$$g_{1n}^k(\xi)=\int\limits_0^{\xi}\nu_n^k(\xi_1)P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)d\xi_1\,,\ 0\le\xi\le\xi_0\,, \tag{27}$$

$$g_{2n}^k(\xi)=\int\limits_{\gamma(\xi-\xi_0)}^{\xi}\nu_n^k(\xi_1)P_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\gamma\xi(\xi-\xi_0)}{\xi_1(\xi+\gamma(\xi-\xi_0))}\right)d\xi_1\,,\ \xi_0\le\xi\le\frac{1}{2}\,, \tag{28}$$

$$g_{1n}^k(\xi)=\sqrt{2}\sigma_{0n}^k(\xi)-\frac{\tau_n^k(\xi)}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\xi}\frac{\tau_n^k(\xi_1)}{\xi_1}P'_{\mu}\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)d\xi_1\,,$$

$$g_{2n}^k(\xi)=\sqrt{2}\sigma_{\beta n}^k(\xi)-\frac{\tau_n^k(\gamma(\xi-\xi_0))}{\sqrt{2}}-\frac{\tau_n^k(\xi)}{\sqrt{2}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\gamma(\xi-\xi_0)}^{\xi}\tau_n^k(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}-\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)P_{\mu}\left(\frac{\xi_1-\eta_1+2(\xi_1\eta_1+\gamma\xi(\xi-\xi_1))}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\gamma\xi-\gamma\xi_0)}\right)_{\xi_1=\eta_1}d\xi_1\,.$$

В [6] показано, что уравнение (27) имеет бесконечное множество решений, а в [7] установлено, что уравнение (28) разрешимо единственным образом.

Следовательно, задача (22), (23) сводится к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода (25) и (26) (см. [1]).

Теперь рассмотрим задачу (22), (24). Из (25), (26) при $\eta=0$, и $\eta=\gamma(\xi-\xi_0)$, с учетом (24), соответственно получим интегральное уравнение

$$\tau_n^k(\xi)=\psi_{1n}^k(\xi)-\int\limits_0^{\xi}\frac{\tau_n^k(\xi_1)}{\xi_1}P'_{\mu}\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)d\xi_1\,,\quad 0\le\xi\le\xi_0 \tag{29}$$

и функционально-интегральное уравнение

$$\tau_n^k(\xi)+\tau_n^k(\gamma(\xi-\xi_0))=\psi_{2n}^k(\xi)-\int\limits_{\gamma(\xi-\xi_0)}^{\xi}\tau_n^k(\xi_1)G_{2n}(\xi,\xi_1)\,d\xi_1\,,\quad \xi_0\le\xi\le\frac{1}{2}\,, \tag{30}$$

$$\psi_{1n}^k(\xi)=2\sigma_{0n}^k(\xi)-\sqrt{2}\int\limits_0^{\xi}\nu_n^k(\xi_1)P_{\mu}\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)d\xi_1\,,$$

$$\psi_{2n}^k(\xi)=2\sigma_{\beta n}^k(\xi)-\sqrt{2}\int\limits_{\gamma(\xi-\xi_1)}^{\xi}\nu_n^k(\xi_1)P_{\mu}\left[\frac{\xi_1^2+\gamma\xi(\xi-\xi_0)}{\xi_1(\xi+\gamma(\xi-\xi_0))}\right]d\xi_1\,,$$

$$G_{2n}(\xi,\xi_1)=\frac{(\gamma(\xi-\xi_0)-\xi)}{\xi_1(\xi+\gamma(\xi-\xi_0))}P'_{\mu}\left[\frac{\xi_1^2+\gamma\xi(\xi-\xi_0)}{\xi_1(\xi+\gamma(\xi-\xi_0))}\right],$$

$$|G_{2n}(\xi,\xi_1)|\le\frac{C}{\xi+\gamma(\xi-\xi_0)}\,,\quad C=\mathrm{const}\,.$$

В [6] доказано, что уравнение (29) имеет бесчисленное множество решений.

Далее, так как интегральный оператор, стоящий в правой части равенства (30) вполне непрерывен, то, как показано в [7], функциональное уравнение (30) однозначно разрешима.

Таким образом, задача (22), (24) также приводится к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода (25) и (26)

Теперь будем решать задачу (17a), (15). Её решение ищем в виде

$$w_{\alpha,n}^{k}(r,x_0)=w_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)+w_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)\ ,$$

где $w_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)$ – решение задачи Коши (17a), (18), а $w_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)$ – решение краевой задачи для уравнения (17a) с данными

$$w_{\alpha,n}^{k,2}(r,0)=0\,,\quad w_{\alpha,n}^{k,2}(r,r)=\sigma_{0n}^{k}(r)-w_{\alpha,n}^{k,1}(r,r)\ ,\quad 0\leqslant r\leqslant r_0\,,$$

$$w_{\alpha,n}^{k,2}(r,\beta(r-r_0)+r_0)=\sigma_{\beta n}^{k}(r)-w_{\alpha,n}^{k,1}(r,\beta(r-r_0)+r_0)\ ,\quad r_0\leqslant r\leqslant r_1\,, \tag{31}$$

$$k=\overline{1,k_n}\,,\quad n=0,1,\dots\,.$$

Учитывая формулы (19), (20), а также обратимость оператора D_{0t}^{α} (см. [8]), задачи (17a), (18) и (17a), (31) соответственно сводим к задаче Коши (17b, (18) и – к задаче для (17b) с данными

$$\frac{\partial}{\partial x_0}w_{0,n}^{k,2}(r,0)=0\,,\ 0<r<1\,,\qquad w_{0,n}^{k,2}(r,r)=\varphi_{1n}^{k}(r)\ ,\ 0\leq r\leq r_0\,,$$

$$w_{0,n}^{k,2}(r,\beta(r-r_0)+r_0)=\varphi_{2n}^{k}(r)\ ,\ r_0\leq r\leq r_1\,,\quad k=\overline{1,k_n}\,,\ n=0,1,\dots\,, \tag{32}$$

где $\varphi_{1n}^{k}(r)$, $\varphi_{2n}^{k}(r)$ функции, выражающиеся через $\tau_n^k(r)$, $\sigma_{0n}^k(r)$, $0\leq r\leq r_0$ и $\tau_n^k(r)$,$\sigma_{\beta n}^k(r)$, $r_0\leq r\leq r_1$.

Задача Коши (17b), (18), как видно из (25) и (26), приводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

Задача (17b), (32), как показано ранее, имеет бесчисленное множество решений.

Далее, используя утверждения 1 и 2, устанавливается, что задача (17a), (15) имеет также бесчисленное множество решений.

Таким образом, задача (1), (2) имеет множество решений вида

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}r^{\frac{(1-m)}{2}}u_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta)\,, \tag{33}$$

где $u_n^k(r,t)$ определяются из двумерных задач.

Теперь рассмотрим задачу (1), (3), и её решение также будем искать в виде (8). Тогда она сведётся к задаче (17a), (16). Решение этой задачи ищем в виде

$$w_{\alpha,n}^{k}(r,x_0)=w_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)+w_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)\ ,$$

где $w^{k,2}_{\alpha,n}(r,x_0)$ – решение задачи Коши $(17a)$, (21), а $w^{k,1}_{\alpha,n}(r,x_0)$ – решение краевой задачи для уравнения $(17a)$ с условиями

$$\frac{\partial}{\partial x_0} w^{k,1}_{\alpha,n}(r,0) = 0\,,\ 0 < r < 1\,, \qquad w^{k,1}_{\alpha,n}(r,r) = \sigma^k_{0n}(r) - w^{k,2}_{\alpha,n}(r,r)\ ,\ 0 \le r \le r_0,$$
$$w^{k,1}_{\alpha,n}(r,\beta(r-r_0)+r_0) = \sigma^k_{\beta n}(r) - w^{k,2}_{\alpha,n}(r,\beta(r-r_0)+r_0)\ ,\ r_0 \le r \le r_1\,, \tag{34}$$
$$k=\overline{1,k_n}\,,\ n=0,1,\ldots\ .$$

Учитывая формулы (20), (19), задачи $(17a)$, (21) и $(17a)$, (34), соответственно, сведём к задаче Коши $(17b), (18')$ и к задаче для $(17b)$ с данными (32).

Таким образом, задача (1),(3) также имеет бесчисленное множество решений вида (33), где $u^k_n(r,t)$ находятся из двумерных задач.

Учитывая ограничения на заданные функции $\tau(r,t), \nu(r,t), \sigma_0(r,t), \sigma_\beta(r,t)$, аналогично [6, 7], можно доказать, что полученное решение $u(r,\theta,t)$ (33) принадлежит искомому классу.

Теорема 1 доказана.

3. Единственность решения задачи 2

Теперь переходим к доказательству теоремы 2. Сначала рассмотрим задачу (1),(4). Для этого построим $u(r,\theta,t)$ – решения уравнения (1), удовлетворяющие краевым условиям

$$u|_S = \tau(r,\theta) = \bar{\tau}^k_n(r) Y^k_{n,m}(\theta)\,, \qquad u|_{S_0 \cup S_\beta} = 0\,,\ k=\overline{1,k_n}\,,\ n=0,1,\ldots\,, \tag{35}$$

$\bar{\tau}^k_n \in V$, где V – множество функций $\tau(r)$ из класса $C^2(0<r<1) \cap C^1(0 \le r \le 1)$.

Очевидно, что множество V плотно в $L_2((0,1))$. Функцию $u(r,\theta,t)$ будем искать в виде (8). Тогда, для $w^k_{\alpha n}(r,x_0)$ получим уравнение $(17a)$ с краевыми условиями

$$w^k_{\alpha,n}(r,0) = \tau^k_n(r)\,,\ 0 \le r \le 1\,, \quad w^k_{\alpha,n}(r,r) = 0\,,\ 0 \leqslant r \leqslant r_0\,,$$
$$w^k_{\alpha,n}(r,\beta(r-r_0)+r_0) = 0\,,\ r_0 \leqslant r \leqslant r_1\,, \quad k=\overline{1,k_n}\,,\ n=0,1,\ldots\ . \tag{36}$$

Как показано в п.2, задача $(17a)$, (36) имеет бесчисленное множество решений.

Таким образом, решение (1), (35) в виде (33) построено, где $u^k_n(r,t)$ определяются из двумерных задач.

Из определения сопряженных операторов (см. [11])

$$vLu - uLv = -vP(u) + uP(v)\,,$$

где

$$P(u) = g(t)\sum_{i=1}^{m} u_{x_i}\cos\left(N^{\perp}, x_i\right) - u_t\cos\left(N^{\perp}, t\right)\,,$$

а $N^{\perp}$ – внутренняя нормаль к границе ∂D_β, по формуле Грина имеем

$$\int\limits_{D_\beta}(vLu - uLv)\, dD_\beta = \int\limits_{\partial D_\beta}\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial v}{\partial N}\right) M\right] ds\,, \qquad (37)$$

где $\dfrac{\partial}{\partial N}$ – конормаль к ∂D_β, а $M^2 = (g(t))^2\sum\limits_{i=1}^{m}\cos^2\left(N^{\perp}, x_i\right) + \cos^2\left(N^{\perp}, t\right)$.

Из (37), принимая во внимание граничные условия (4) и тот факт, что на характеристических коноидах K_0, K_1 конормальная производная $\dfrac{\partial}{\partial N}$ совпадает с производной по касательному направлению (см. [11]), получим $\int\limits_{S}\tau(r,\theta)v_t(r,\theta,0)ds = 0$. Отсюда, поскольку линейная оболочка системы функций $\{\overline{\tau}_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta)\}$ плотна (см. [12]) в $L_2(S)$, заключаем, что $v_t(r,\theta,0) = 0$, $\forall(r,\theta)\in S$. Следовательно, в силу единственности решения задачи Коши (см. [11]): $Lv = 0$, $v(x,0) = v_t(x,0) = 0$, будем иметь $v(x,t) = 0$, $\forall(x,t)\in D_\beta$.

Единственность решения задачи (1), (4) доказана. Аналогичным образом, доказывается единственность решения задачи (1), (5).

Заметим, что из примеров, построенных в [6], и из теоремы 1 следует, что однородная задача, соответствующая задаче 1, имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.

Литература

1. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа / А.В. Бицадзе. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.

2. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

3. Protter M.N. // Dure Math. J. – 1954. – 21,1. – P.1-7

4. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике / Ф.И. Франкль. – М.: Наука, 1973. – 711 с.

5. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / С.Г. Михлин. – М.:Физматгиз, 1962. – 254 с.

6. Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений / С.А. Алдашев. – Алматы: Гылым, 1994. – 170 с.

7. Алдашев С.А. Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения / С.А. Алдашев. – Орал: ЗКАТУ, 2007. – 139 с.

8. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии / А.М. Нахушев. – М.: Высш. шк., 1985. – 301 с.

9. Алдашев С.А. // Укр.матем.журнал. – 2003. – 55,1. – С.100-107.

10. Copson E.T. // J.Rath. Mech. And Anal. – 1958. – 1. – P.324-348

11. Смирнов В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – М: Наука, 1981. – Т.4(2). – 550 с.

12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 542 с.

MUTUALLY-ASSOCIATE BOUNDARY PROBLEMS WITH THE DEVIATION FROM CHRACTERISTICS FOR MANY-DIMENSIONAL CHAPLYGIN EQUATION

T.T. Sheriyazdan

Zhubanov Aktiubinsk state university,

Abylkhaiyrkhana Av., Aktobe, 030000, Kazakhstan, e-mail: talgatsher72@inbox.ru

Abstract. Mutually-associate boundary problems with the deviation from characteristics for many-dimensional Chaplygin equation are investigated.

Key words: boundary problem, spherical functions, characteristics, many-dimensional equations.

УДК 517.987

ИНДИКАТОРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И СЕПАРАБЕЛЬНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА

Ю.П. Вирченко, О.Л. Шпилинская

Белгородский государственный университет,

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru
Институт монокристаллов НАНУ,

пр. Ленина, 60, Харьков, Украина, e-mail: spilolga@isc.kharkov.ua

Аннотация. Изучается связь замкнутых случайных подмножеств из $\mathbb{R}$ с соответствующим каждому из них индикаторным случайным процессом. Доказывается, что для наличия сепарабельности у замкнутого случайного множества, понимаемой по Матерону, необходима и достаточна сепарабельность его индикаторного случайного процесса.

Ключевые слова: случайные множества, индикаторные процессы, сепарабельность.

1. Введение. Традиционно, начиная с классических работ Шоке [1], Кендала [2], Матерона [3], случайные множества определяют посредством отображения F некоторого вероятностного пространства $\langle \Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P} \rangle$ такого, у которого образами элементов ω пространства элементарных событий Ω являются подмножества фиксированного множества W. Множество W, в дальнейшем, мы называем *пространством погружения*. Это отображение порождает новое вероятностное пространство $\langle \mathsf{F}(\Omega), \mathsf{F}(\mathcal{B}), \mathsf{P}(\mathsf{F}^{-1}(\cdot)) \rangle$, в котором образ $\Sigma = \mathsf{F}(\Omega)$ содержится в 2^W и представляет собой новое пространство элементарных событий, $\mathfrak{B} = \mathsf{F}(\mathcal{B})$ является σ-алгеброй на пространстве Σ, элементами которой являются *классы множеств*. Таким образом, отображение F, по определению измеримо относительно $\mathcal{B}$. Наконец, $\mathsf{Q}(\cdot) = \mathsf{P}(\mathsf{F}^{-1}(\cdot))$ – вероятностная мера, индуцируемая на Σ посредством отображения F.

Частным случаем такого построения вероятностного пространства случайных множеств является их определение на основе индикаторного случайного поля $\langle \tilde{\xi}(x); x \in W \rangle$, заданного на W.[‡)] А именно, пусть имеется случайное поле $\langle \tilde{\xi}(x); x \in W \rangle$, определяемое тройкой $\langle \Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P} \rangle$ и принимающее значения в $\{0, 1\}$. Тогда Ω состоит из всех допустимых для поля $\langle \tilde{\xi}(x); x \in W \rangle$ случайных реализаций, а отображение F, сопоставляющее случайным реализациям $\tilde{\xi}(x)$, $x \in W$ элементы A из Σ даётся равенством $A = \mathsf{F}(\tilde{\xi}) \equiv \{x : \tilde{\xi}(x) = 1\}$.

[‡] Знак "тильда"над буквой далее всюду указывает на случайность математического объекта, обозначаемого этой буквой.

Обычно, в теории случайных процессов изучается ситуация, когда множество W снабжено метрикой и является, относительно этой метрики, полным метрическим пространством (см., например, [4]). В этом случае, для случайных полей на W возможно определение понятия сепарабельности [4], которое было введено Дж.Дубом. Для сепарабельных случайных полей структура измеримости полностью определяется булевским полукольцом множеств $\{\tilde{\xi}(x_i) = \alpha_i; i = 1 \div n\}$, перечисляемых всевозможными наборами $\{x_i \in W; i = 1 \div n\}$, $\{\alpha_i \in \{0,1\}; i = 1 \div n\}$ при различных значениях $n \in \mathbb{N}$, а вероятностная мера P получается однозначным продолжением аддитивной меры, заданной на полукольце указанием вероятностей $\Pr\{\tilde{\xi}(x_i) = \alpha_i; i = 1 \div n\}$ и обладающей на нём свойством σ-полуаддитивности (см., например, [6]). Использование при построении случайных множеств сепарабельных случайных полей указанного выше типа, которые называются *индикаторными*, накладывает некоторое ограничение на тип случайных множеств в метрическом пространстве W. Возникает естественный вопрос: каким характеристическим свойством должно обладать определяемое посредством случайного индикаторного сепарабельного поля случайное множество в W. В настоящей работе даётся ответ на этот вопрос в том случае, когда метрическим пространством погружения W является произвольный конечный или бесконечный замкнутый отрезок $W \subseteq \mathbb{R}$, а случайное множество замкнуто.

Мы докажем, что случайные множества из пространства $\langle \mathsf{F}(\Omega), \mathsf{F}(\mathcal{B}), \mathsf{P}(\mathsf{F}^{-1}(\cdot))\rangle$, реализации которых являются замкнутыми почти наверное подмножествами из W, построенные посредством сепарабельного индикаторного случайного процесса, являются сепарабельными по Матерону случайными замкнутыми множествами. Этот факт остаётся справедливым и в том случае, когда в качестве W выбирается замкнутая область в пространстве $\mathbb{R}^d$ с $d \in \mathbb{N}$, $d > 1$, однако в этой работе мы ограничиваемся одномерным случаем, так как обобщение на многомерный случай требует существенного усложнения обозначений.

2. Сепарабельные индикаторные случайные процессы. Пусть $W = [c_1, c_2] \subseteq \mathbb{R}$, $c_1 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $c_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $c_1 < c_2$ и $\langle \tilde{\xi}(x); x \in W\rangle$ – случайный процесс на W со значениями в $\{0,1\}$. Такие процессы будем далее называть *индикаторными*. Естественное множество Ω реализаций $\tilde{\xi}$, образующее в этом случае пространство элементарных событий, состоит из двузначных функций, определённых на W, с указанной областью значений.

Приведём классическое определение сепарабельности случайного процесса со значениями в $\mathbb{R}$.

Определение 1 (см., например, [5], с.53). *Пусть случайный процесс* $\langle\tilde{\xi}(x)\,;x\in W\rangle$, *заданный на отрезке* W *и принимающий значения в* $\mathbb{R}$, *определяется вероятностным пространством* $\langle\Omega,\mathcal{B},\mathsf{P}\rangle$. *Процесс* $\langle\tilde{\xi}(x)\,;x\in W\rangle$ *называется сепарабельным по отношению к счётному, всюду плотному в* W *множеству* $T\subset W$, *которое называется множеством сепарабельности, если существует случайное событие* $N_T\in\mathcal{B}$ *такое, что* $\mathsf{P}(N_T)=0$, *и для любого отрезка* $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ *и интервала* $(a,b)\subset W$ *имеет место включение*

$$\{\tilde{\xi}\in\Omega:\forall(x\in(a,b)\cap T:\,\tilde{\xi}(x)\in[\alpha,\beta])\}\setminus$$
$$\{\tilde{\xi}\in\Omega:\forall(x\in(a,b):\,\tilde{\xi}(x)\in[\alpha,\beta])\}\subset N_T\,. \qquad (1)$$

Определение 2. *Процесс* $\langle\tilde{\xi}(x)\,;x\in W\rangle$ *называется сепарабельным на* W *(в общем смысле), если в Определении 1 случайное событие* N_T *можно выбрать так, что оно не зависит от множества сепарабельности* T, $N_T\equiv N$, $\mathsf{P}(N)=0$.

Таким образом, для сепарабельного случайного процесса в качестве множества сепарабельности может быть выбрано любое счётное всюду плотное подмножество из W.

Далее, в этой работе мы рассматриваем только такие случайные процессы, которые являются индикаторными для случайных множеств. В связи с этим, переформулируем данное определение сепарабельности случайного процесса для частного случая индикаторных случайных процессов $\langle\tilde{\xi}(x)\in\{0,1\};x\in W\rangle$.

Лемма 1. *Индикаторный случайный процесс* $\langle\tilde{\xi}(x)\in\{0,1\}\,;x\in W\rangle$ *является сепарабельным по отношению к счётному, всюду плотному в* W *множеству* T *тогда и только тогда, когда существует такое случайное событие* N_T, $\mathsf{P}(N_T)=0$, *что для любого интервала* $(a,b)\subset W$ *имеют место включения*

$$\{\tilde{\xi}\in\Omega:\forall(x\in(a,b)\cap T:\,\tilde{\xi}(x)=1)\}\setminus\{\tilde{\xi}\in\Omega:\forall(x\in(a,b):\,\tilde{\xi}(x)=1)\}\subset N_T\,, \qquad (2)$$

$$\{\tilde{\xi}\in\Omega:\forall(x\in(a,b)\cap T:\,\tilde{\xi}(x)=0)\}\setminus\{\tilde{\xi}\in\Omega:\forall(x\in(a,b):\,\tilde{\xi}(x)=0)\}\subset N_T\,. \qquad (3)$$

Индикаторный случайный процесс является сепарабельным (в общем смысле) тогда и только тогда, когда во включениях (2) и (3) случайное событие $N_T=N$ *может быть выбрано таким образом, что оно не зависит от* T.

□ Это утверждение очевидно, так как приведенные включения (2) и (3) получается непосредственно из определений 1 и 2 при двух возможных выборах α и β, $\alpha=\beta=0$ и

$\alpha = \beta = 1$ в (1). Наоборот, в случае выполнимости включений (2) и (3), включения (1) для произвольно выбранного отрезка $[\alpha, \beta]$ являются их следствием. ■

Случайные сепарабельные процессы обладают с вероятностью единица такими реализациями, которые имеют в каждой точке $x \in W$ пределы справа и слева (см., например, [4]).

3. Случайные замкнутые множества. Будем рассматривать далее случайные замкнутые множества в W. Обозначим посредством $\mathrm{cl}(\cdot)$ операцию *замыкания*, результатом применения которой к произвольному подмножеству из W является его замыкание. Пусть $\mathfrak{L}_W = \{L \subset W : \mathrm{cl}(L) = L\}$ – класс замкнутых множеств в W.

Определение 3 (см. [3]). *Случайным замкнутым множеством в W называется вероятностное пространство $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$, у которого Σ является классом подмножеств W, $\Sigma \subset 2^W$, σ-алгебра $\mathfrak{B}$ является минимальной σ-алгеброй, содержащей классы множеств, которые являются элементами семейства $\mathfrak{F} = \{\{L \in \mathfrak{L}_W : [a,b] \cap L \neq \varnothing\}; c_1 \leqslant a < b \leqslant c_2\}$.*

При этом распределение вероятностей Q таково, что, для любого случайного события $\mathcal{A} = \{\tilde{X} \in \mathcal{A}\} \in \mathfrak{B}$, класс $\mathrm{cl}(\mathcal{A}) \equiv \{\mathrm{cl}(\tilde{X}); \tilde{X} \in \mathcal{A}\}$ также является случайным событием, то есть представляет собой измеримый класс множеств в вероятностном пространстве $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$. Кроме того, для любых измеримых классов множеств имеет место равенство $\mathsf{Q}(\mathcal{A}) = \mathsf{Q}(\mathrm{cl}(\mathcal{A}))$.

Данное определение случайных замкнутых множеств таково, что оно предполагает измеримость операции замыкания в применении к случайным событиям, т.е. для каждого случайного события $\mathcal{A}$, класс $\mathrm{cl}(\mathcal{A})$ реализаций из Σ также является случайным событием (не обязательно принадлежащем $\mathfrak{B}$[§)]). Из этого определения, в частности, следует, что для случайных замкнутых множеств имеет место равенство $\mathsf{Q}(\{\tilde{X} \in \Sigma : \mathrm{cl}(\tilde{X}) = \tilde{X}\}) = 1$ [3]. Это условие оказывается также и достаточным.

А именно, справедлива

Лемма 2. *Пусть случайное множество $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$ таково, что для всякого его случайного события $\mathcal{A}$ класс множеств $cl(\mathcal{A})$ также является случайным событием. Тогда для замкнутости этого случайного множества необходимо и достаточно, чтобы имело место $\mathsf{Q}(\{\tilde{X} \in \Sigma : \mathrm{cl}(\tilde{X}) = \tilde{X}\}) = 1$.*

□ Докажем достаточность выполнимости указанного равенства. Пусть $\mathcal{A}$ – произволь-

---

[§)]Мы различаем классы реализаций, принадлежащие $\mathfrak{B}$ и измеримые классы реализаций, которые присоединяются к $\mathfrak{B}$ в результате продолжения по Лебегу меры Q с σ-алгебры $\mathfrak{B}$ на более широкое семейство. Случайными событиями мы называем именно эти последние классы реализаций.

ное случайное событие из вероятностного пространства $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q}\rangle$. Так как $\mathcal{A}$ и $\mathrm{cl}(\mathcal{A})$ одновременно измеримы, то есть являются элементами σ-алгебры измеримых классов подмножеств из W, то

$$\mathsf{Q}\left([\mathcal{A}\setminus \mathrm{cl}(\mathcal{A})]\cup[\mathrm{cl}(\mathcal{A})\setminus\mathcal{A}]\right) = \mathsf{Q}\left([\{\tilde{X}=\mathrm{cl}(\tilde{X})\}]\cap[\mathcal{A}\setminus \mathrm{cl}(\mathcal{A})]\cup[\mathrm{cl}(\mathcal{A})\setminus\mathcal{A}]\right) =$$

$$= \mathsf{Q}\left([\{\tilde{X}=\mathrm{cl}(\tilde{X})\}\cap[\mathcal{A}\setminus \mathrm{cl}(\mathcal{A})]]\cup[\{\tilde{X}=\mathrm{cl}(\tilde{X})\}\cap[\mathrm{cl}(\mathcal{A})\setminus\mathcal{A}]]\right).$$

где первое равенство связано с тем, что $\mathsf{Q}(\{\tilde{X}=\mathrm{cl}(\tilde{X})\})=1$. Так как первая компонента объединения преобразуется следующим образом

$$\{\tilde{X}=\mathrm{cl}(\tilde{X})\}\cap[\mathcal{A}\setminus \mathrm{cl}(\mathcal{A})] = [\{\tilde{X}=\mathrm{cl}(\tilde{X})\}\cap\mathcal{A}]\setminus[\{\tilde{X}=\mathrm{cl}(\tilde{X})\}\cap\mathrm{cl}(\mathcal{A})] =$$

$$= [\{\tilde{X}=\mathrm{cl}(\tilde{X})\}\cap\mathrm{cl}(\mathcal{A})]\setminus[\{\tilde{X}=\mathrm{cl}(\tilde{X})\}\cap\mathrm{cl}(\mathcal{A})] = \varnothing$$

и точно также вторая –

$$\{\tilde{X}=\mathrm{cl}(\tilde{X})\}\cap[\mathrm{cl}(\mathcal{A})\setminus\mathcal{A}] = [\{\tilde{X}=\mathrm{cl}(\tilde{X})\}\cap\mathrm{cl}(\mathcal{A})]\setminus[\{\tilde{X}=\mathrm{cl}(\tilde{X})\}\cap\mathcal{A}] =$$

$$= [\mathrm{cl}(\tilde{X})\cap\mathrm{cl}(\mathcal{A})]\setminus[\{\tilde{X}=\mathrm{cl}(\tilde{X})\}\cap\mathrm{cl}(\mathcal{A})] = \varnothing\,,$$

то из полученного равенства следует

$$\mathsf{Q}\left([\mathrm{cl}(\mathcal{A})\setminus\mathcal{A}]\cup[\mathcal{A}\setminus \mathrm{cl}(\mathcal{A})]\right) = \mathsf{Q}(\varnothing) = 0\,,$$

что означает $\mathsf{Q}(\mathcal{A}) = \mathsf{Q}(\mathrm{cl}(\mathcal{A}))$. ■

Следующий пример показывает наличие случайных множеств, которые не являются замкнутыми.

Пример 1. Пусть G – непрерывная функция распределения вероятностей, точки изменения которой находятся на отрезке $[0,1]$. Пусть, далее, $\langle\tilde{\xi}_n\in[0,1]; n\in\mathbb{N}\rangle$ – последовательность независимых одинаково распределённых величин, общей функций распределения которой является G. Определим на основе каждой из случайных реализаций этой последовательности новую случайную последовательность $\langle\tilde{Y}_n; n\in\mathbb{N}_+\rangle$, компонентами которой являются конечные множества $\tilde{Y}_n = \{\tilde{\xi}_k\in[0,1]; k=1\div n\}$. Случайные реализации $\tilde{X}$ конструируемого нами множества определяются в виде теоретико-множественных пределов траекторий случайного процесса $\langle\tilde{Y}_n; n\in\mathbb{N}\rangle$ с дискретным временем,

$$\tilde{X} = \lim_{n\to\infty}\tilde{Y}_n\,. \tag{4}$$

Таким образом, имеется вероятностное пространство Ω, состоящее из последовательностей $\tilde{\xi} = \langle \tilde{\xi}_n \in [0,1]; n \in \mathbb{N} \rangle$, структура измеримости на котором определяется стандартным образом в виде σ-алгебры $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$, где $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ – σ-алгебра борелевских множеств из $\mathbb{R}$, а распределение вероятностей $\mathsf{P} = \mathsf{G}^{\mathbb{N}}$ понимается, как степень меры G на $\mathbb{R}$, определяемой функцией распределения G. Вероятностное пространство $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$ конструируемого случайного множества в пространстве погружения $W = [0,1]$ является образом отображения F, которое переводит элементы $\tilde{\xi}$ из Ω в элементы $\tilde{X}$, определяемые формулой (4), Вся их совокупность $\Sigma = \mathsf{F}(\Omega)$ составляет выборочное пространство случайного множества.

Каждая реализация $\tilde{X}$, по построению, состоит из счётного множества точек из W. Ввиду непрерывности функции G каждая реализация с вероятностью 1 всюду плотно покрывает отрезок $[0,1]$. Поэтому, каждая реализация с вероятностью 1 не является замкнутой. ■

Определённое выше семейство $\mathfrak{B}$ случайных событий вероятностного пространства замкнутого случайного множества, являющееся σ-алгеброй, обладает простыми, но очень важными свойствами.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{B}$ *– минимальная* σ*-алгебра, содержащая все элементы класса* $\mathfrak{F}$*. Тогда для любых объектов: точки* $x \in W$*, чисел* a *и* b*,* $c_1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c_2$ *и счётного множества* $\Lambda \subset W$ *– следующие классы подмножеств из* W *принадлежат* $\mathfrak{B}$*:*¶)

$$1).\ \{\tilde{X} \ni x\}\,;\quad 2).\ \{\tilde{X} \cap \Lambda \neq \varnothing\}\,;$$

$$3).\ \{\tilde{X} \subset (a,b)\}\,;\quad 4).\ \{\tilde{X} \subset [a,b]\}\,;$$

$$5).\ \{\tilde{X} = \{x\}\}\,;\quad 6).\ \{\tilde{X} \supset \Lambda\}\,;$$

$$7).\ \{\tilde{X} \cap (a,b) \neq \varnothing\}\,;\quad 8).\ \{\tilde{X} \cap [a,b] \neq \varnothing\}\,.$$

□ 1). Пусть $x \in W$, и последовательность отрезков $\langle [a_n, b_n]\,; n \in \mathbb{N} \rangle$, каждый из которых содержит эту точку, сходится при $n \to \infty$ к x в теоретико-множественном смысле. Так как, согласно Определению 3, для каждого $n \in \mathbb{N}$, класс случайных реализаций $\{\tilde{X} \cap [a_n, b_n] \neq \varnothing\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathfrak{B}$, то класс

$$\{x \in \tilde{X}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{[a_n, b_n] \cap \tilde{X} \neq \varnothing\}$$

¶Начиная с этого места мы при теоретико-множественном определении случайных событий опускаем указание того множества, откуда выбираются случайные реализации, так как это не должно вызывать недоразумения.

также является элементом из $\mathfrak{B}$.

2). Из 1) следует, что для любого счётного множества Λ класс множеств

$$\{\Lambda \cap \tilde{X} \neq \varnothing\} = \bigcup_{x\in\Lambda} \{x \in \tilde{X}\}\,,$$

являющийся счётным объединением классов множеств из $\mathfrak{B}$, также принадлежит $\mathfrak{B}$.

3). Класс множеств $\{[a,b] \cap \tilde{X} \neq \varnothing\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathfrak{B}$ по построению. Тогда класс

$$\complement\{[a,b] \cap \tilde{X} \neq \varnothing\} = \{[a,b] \cap \tilde{X} = \varnothing\} = \{\tilde{X} \subset W \setminus [a,b]\}$$

также принадлежит $\mathfrak{B}$ при любых a и b из отрезка W, если $b > a$. Поэтому следующие классы множеств $\{\tilde{X} \subset W \setminus [c_1, a]\}$, $\{\tilde{X} \subset W \setminus [b, c_2]\}$ являются элементами из $\mathfrak{B}$. Отсюда следует, что при указанных a и b класс случайных реализаций

$$\{\tilde{X} \subset W \setminus [b, c_2]\} \cap \{\tilde{X} \subset W \setminus [c_1, a]\} =$$

$$= \{\tilde{X} \subset W \setminus ([c_1, a] \cup [b, c_2])\} = \{\tilde{X} \subset (a, b)\}\,.$$

принадлежит $\mathfrak{B}$.

4). Допустим теперь, что числа a и b связаны нестрогим неравенством $a \leqslant b$. Рассмотрим последовательности $\langle a_n; n \in \mathbb{N}\rangle$ и $\langle b_n; n \in \mathbb{N}\rangle$, где первая, монотонно возрастая, стремится к a, а вторая, монотонно убывая, стремится к b при $n \to \infty$. Тогда из представления

$$\{\tilde{X} \subset [a,b]\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\tilde{X} \subset (a_n, b_n)\}\,,$$

в виде пересечения счётного набора классов множеств из $\mathfrak{B}$, на основании доказанного утверждения 3), получаем 4).

5). Положив в 4) $x = a = b$ получаем утверждение 5).

6). Для произвольного не более счётного множества Λ класс множеств $\{\Lambda \subset \tilde{X}\}$, представленный в виде не более чем счётного пересечения

$$\{\tilde{X} \supset \Lambda\} = \bigcap_{x\in\Lambda} \{x \in \tilde{X}\}$$

элементов из $\mathfrak{B}$ (см. 1).), является также элементом из $\mathfrak{B}$.

7). Пусть $a < b$. Рассмотрим последовательности $\langle a_n \in (a,b); n \in \mathbb{N}\rangle$ и $\langle b_n \in (a,b); n \in \mathbb{N}\rangle$ такие, что при всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место $a_n < b_n$. Первая последовательность, монотонно убывая, стремится к a, а вторая, монотонно возрастая, стремится к b при $n \to \infty$. Тогда из представления

$$\{\tilde{X} \cap (a,b) \neq \varnothing\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tilde{X} \cap [a_n, b_n] \neq \varnothing\}\,,$$

в виде объединения счётного набора классов множеств из $\mathfrak{B}$, следует, что справедливо утверждение 7).

8). Справедливость утверждения 8) следует из представления

$$\{\tilde{X} \cap [a,b] \neq \varnothing\} = \{\tilde{X} \cap (a,b) \neq \varnothing\} \cup \{a \in \tilde{X}\} \cup \{b \in \tilde{X}\}\,. \quad \blacksquare$$

Следствие. *Классы множеств, представленные в пп.1)-8), являются случайными событиями на вероятностном пространстве $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$ замкнутых случайных множеств.*

$\square$ Утверждение следует из того, что все элементы σ-алгебры $\mathfrak{B}$ – измеримые классы множеств на вероятностном пространстве $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$. $\blacksquare$

Указанное следствие доказанной теоремы, как утверждение об измеримости некоторых классов множеств в вероятностном пространстве замкнутых случайных множеств, допускает следующее усиление.

Теорема 2. *В любом из вероятностных пространств $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$ замкнутых случайных множеств, для любых чисел a и b, $c_1 < a < b < c_2$ измеримы следующие классы множеств*

$$1).\ \{[a,b] \subset \tilde{X}\}\,; \quad 2).\ \{(a,b) \subset \tilde{X}\}\,.$$

$\square$ 1). Положив, в качестве Λ в классе множеств 6), множество, всюду плотное в интервале (a,b), и, воспользовавшись определением вероятностного пространства замкнутых случайных множеств, применим операцию замыкания к случайным реализациям события $\{\Lambda \cap (a,b) \subset \tilde{X}\}$. В результате, получаем утверждение об измеримости класса $\{\mathrm{cl}(\Lambda \cap (a,b)) \subset \mathrm{cl}(\tilde{X})\}$, посредством продолжения по Лебегу распределения вероятностей Q с σ-алгебры $\mathfrak{B}$. Таким образом, класс $\{\mathrm{cl}(\Lambda \cap (a,b)) \subset \mathrm{cl}(\tilde{X})\}$ является случайным событием, совпадающим с вероятностью единица с классом множеств $\{[a,b] \subseteq \tilde{X}\}$, которое, таким образом, является измеримым.

2). Зададим две последовательности $\langle a_n; n \in \mathbb{N} \rangle$, $\langle b_n; n \in \mathbb{N} \rangle$, где первая является монотонно убывающей, а вторая – монотонно возрастающей, причём имеют место неравенства $a < a_n < b_n < b$. Кроме того, потребуем чтобы $a_n \to a$ и $b_n \to b$ при $n \to \infty$. Тогда имеет место представление

$$\{(a,b) \subset \tilde{X}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{[a_n, b_n] \subset \tilde{X}\}\,.$$

Отсюда, согласно доказанному выше утверждению п.1) и того факта, что счётное объединение измеримых классов множеств $\{[a_n, b_n] \subset \tilde{X}\}$ измеримо, получаем, что измерим класс множеств $\{(a,b) \subset \tilde{X}\}$. ■

Рассмотрим теперь отображение F, порождающее случайные множества на основе индикаторных случайных процессов. Пусть пространство элементарных событий Ω в вероятностном пространстве $\langle \Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P} \rangle$ представляет собой множество всех индикаторных функций на W, т.е. принимающих только значения 0 или 1. Определим пространство Σ как образ Ω при отображении $\mathsf{F} : \Omega \mapsto \Sigma$, действие которого на любую индикаторную функцию $\tilde{\xi} \in \Omega$ определяется формулой

$$\mathsf{F}(\tilde{\xi}) = \tilde{X} = \{x \in W : \tilde{\xi}(x) = 1\}\,. \tag{5}$$

Это отображение взаимно однозначно, то есть имеется однозначное обратное отображение F^{-1}, действие которого на любое подмножество $\tilde{X} \subset W$ имеет вид

$$\mathsf{F}^{-1}(\tilde{X}) = \tilde{\xi}(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \tilde{X}\,; \\ 0 & , x \notin \tilde{X}\,; \end{cases} \qquad \tilde{X} \subset W\,. \tag{6}$$

Случайный процесс $\langle \tilde{\xi}(x); x \in W \rangle$, где $\tilde{\xi} \in \Omega$, является *индикаторным для случайного множества* $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$. Множество Ω его случайных реализаций совпадает с $\mathsf{F}^{-1}(\Sigma)$, σ-алгебра $\mathcal{B}$ совпадает с $\mathsf{F}^{-1}(\mathfrak{B})$, а распределение вероятностей P определяется как $\mathsf{P} = \mathsf{QF}$. В частности, индикаторный случайный процесс сопоставляется случайному замкнутому множеству (см., например, [3], с.67).

4. Сепарабельность случайных замкнутых множеств. Основываясь на взаимно однозначной связи между случайным множеством и соответствующим ему индикаторным случайным процессом, дадим, исходя из определений 2 и 3, следующее

Определение 4. *Случайное множество в пространстве погружения W называется сепарабельным относительно множества сепарабельности $T \subset W$, если соответствующий ему индикаторный случайный процесс на W является сепарабельным относительно T.*

Определение 5. *Случайное множество в пространстве погружения W называется сепарабельным (в общем смысле), если соответствующий ему индикаторный случайный процесс на W является сепарабельным.*

Следствием этого определения сепарабельности случайного множества является следующая

Лемма 3. *Случайное замкнутое множество $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$ в пространстве погружения W является сепарабельным относительно счётного, всюду плотного в W множества T тогда и только тогда, когда существует такое счётное, всюду плотное в W множество $T \subset \mathbb{R}$ и такое случайное событие $\mathcal{N}_T$, имеющее вероятность $\mathsf{Q}(\mathcal{N}_T) = 0$, что для любого интервала (a, b) имеют место включения*

$$\{(a,b) \cap T \subset \tilde{X}\} \setminus \{(a,b) \subset \tilde{X}\} \subset \mathcal{N}_T\,, \tag{7}$$

$$\{(a,b) \cap T \cap \tilde{X} = \varnothing\} \setminus \{(a,b) \cap \tilde{X} = \varnothing\} \subset \mathcal{N}_T\,. \tag{8}$$

□ Ввиду того, что множество значений индикаторного процесса $\langle \tilde{\xi}(x); x \in W \rangle$ состоит из двух точек $\{0, 1\}$, то условие его сепарабельности относительно T состоит в существовании случайного события N_T, для которого $\mathsf{P}(N_T) = 0$ и, на основании Леммы 1, имеют место включения

$$A_0 \equiv \{\tilde{\xi} : \forall (x \in (a,b) \cap T : \, \tilde{\xi}(x) = 1)\} \setminus \{\tilde{\xi} : \forall (x \in (a,b) : \, \tilde{\xi}(x) = 1)\} \subset N_T\,,$$

$$A_1 \equiv \{\tilde{\xi} : \forall (x \in (a,b) \cap T : \, \tilde{\xi}(x) = 0)\} \setminus \{\tilde{\xi} : \forall (x \in (a,b) : \, \tilde{\xi}(x) = 0)\} \subset N_T\,,$$

верные для любого интервала $(a, b) \subset W$. Отсюда следует, что для соответствующих случайных событий $\mathsf{F}(A_0)$, $\mathsf{F}(A_1)$, $\mathsf{F}(N_T)$ в пространстве $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$ имеют место включения

$$\mathsf{F}(A_0) = \{\forall (x \in (a,b) \cap T : \, x \in \tilde{X})\} \setminus \{\forall (x \in (a,b) : \, x \in \tilde{X})\} \subset \mathsf{F}(N_T)\,,$$

$$\mathsf{F}(A_1) = \{\forall (x \in (a,b) \cap T : \, x \notin \tilde{X})\} \setminus \{\forall (x \in (a,b) : \, x \notin \tilde{X})\} \subset \mathsf{F}(N_T)\,.$$

Так как $\mathsf{Q}(\mathsf{F}(N_T)) = \mathsf{P}(N_T) = 0$, то, положив $\mathcal{N}_T = \mathsf{F}(N_T)$, получим, что $\mathsf{Q}(\mathcal{N}_T) = 0$, и эти включения эквивалентны соответственно (7) и (8). ■

Случайное замкнутое множество может быть сепарабельным относительно одного множества сепарабельности T, но не быть сепарабельным относительно другого счётного, всюду плотного множества. Более того, случайное замкнутое множество может не быть сепарабельным ни для какого счётного, всюду плотного в W множества T. Следующие примеры демонстрируют эти положения.

Пример 2. Пространство Σ случайного множества в пространстве погружения $W = [0, 1]$ состоит из двух реализаций $\Sigma = \{\varnothing, \{1/2\}\}$. По этой причине такое случайное множество замкнуто. Его σ-алгебра конечна, а распределение вероятностей определяется равенством $\mathsf{Q}(\{1/2\}) = p$, $0 < p < 1$. Пусть $T = \{k/2^n; k = 0 \div 2^n, n \in \mathbb{N}\}$. Тогда, для единственной непустой реализации $\tilde{X} = \{1/2\}$ имеем $T \cap \{1/2\} = \{1/2\}$, то есть включение (8) выполняется. Точно также включение (7) выполняется тривиальным образом, так как $\{(a,b) \cap T \subset \tilde{X}\} = \varnothing$ для любого интервала (a,b). Поэтому случайное множество сепарабельно, в силу Леммы 3, относительно данного счётного, всюду плотного в W множества T.

Наоборот, если $T = \{k/3^n; k = 0 \div 3^n, n \in \mathbb{N}\}$, то для непустой реализации $\tilde{X} = \{1/2\}$ имеем $\{1/2\} \cap T = \varnothing$ с вероятностью p. Поэтому $\mathsf{Q}(\{(a,b) \cap T \cap \tilde{X} = \varnothing\}) = 1$ для любого интервала (a,b), в то время как $\mathsf{Q}(\{(a,b) \cap \tilde{X} = \varnothing\}) = 1 - p$ в случае, если $(a,b) \ni 1/2$. Следовательно, включение (8) не выполняется и случайное множество не сепарабельно относительно последнего счётного, всюду плотного в W множества T. ■

Пример 3. Случайное множество в пространстве погружения $W = [0,1]$ одноточечное и замкнуто. Его пространство состоит из одноточечных множеств $\Sigma = \{\{x\}; x \in [0,1]\}$, σ-алгеброй $\mathfrak{B}$ является σ-алгебра борелевских множеств в W, а распределение вероятностей даётся непрерывной функцией распределения $F(x) = \mathsf{Q}\{\{x\} : \tilde{x} < x\}$. Тогда вероятность случайного события $\{\tilde{x} = z\}$ равна нулю, для любого числа $z \in [0,1]$, и поэтому для любого счётного, всюду плотного в W множества T вероятность события $\{\tilde{x} \in T\}$ также равна нулю. Следовательно, $\mathsf{Q}\left(\{(a,b) \cap T \cap \tilde{X} = \varnothing\}\right) = 1$, где $\tilde{X} = \{x\}$, в то время как

$$\mathsf{Q}\left(\{(a,b) \cap \tilde{X} = \varnothing\}\right) = F(a) + 1 - F(b) \not\equiv 1$$

и включение (8) не имеет места. Случайное множество не сепарабельно. ■

Случайное множество, рассмотренное нами в Примере 1, очевидно, принимая во внимание изучение последнего примера, является несепарабельным по отношению к любому множеству сепарабельности $T \subset [0,1]$.

Оказывается, что условие замкнутости случайного множества является всё же очень сильным. При его наличии, можно ослабить достаточное условие относительной сепарабельности.

Лемма 4. *Если случайное множество на отрезке $W \subset \mathbb{R}$ с вероятностным пространством $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$, $\Sigma \subset 2^W$ замкнуто, то существует такое случайное событие $\mathcal{N}$, $\mathsf{Q}(\mathcal{N}) = 0$, для которого при любых: $a, b \in W$, $a < b$ и счётного, всюду плотного в W множества T имеет место включение*

$$\{(a,b) \cap T \subset \tilde{X}\} \setminus \{(a,b) \subset \tilde{X})\} \subset \mathcal{N}. \tag{9}$$

□ Пусть равенство $\mathrm{cl}(\tilde{X}) = \tilde{X}$ имеет место с вероятностью 1. Положим

$$\mathcal{N} = \{\mathrm{cl}(\tilde{X}) \setminus \tilde{X} \neq \varnothing\}\,.$$

Согласно определению замкнутого множества этот класс измерим и $\mathsf{Q}(\mathcal{N}) = 0$. Зафиксируем счётное, всюду плотное в W множество T и выберем произвольный интервал $(a, b) \subset W$. Пусть $x \in (a, b)$ – произвольная точка из (a, b). Рассмотрим замкнутые случайные реализации $\tilde{X}$ такие, что $(a, b) \cap T \subset \tilde{X}$. Вся их совокупность, ввиду п.6) Теоремы 1, составляет случайное событие. Так как T всюду плотно в W, то найдётся последовательность $\langle x_n \in (a, b) \cap T\,; n \in \mathbb{N}\rangle$, сходящаяся к точке x. В силу замкнутости $\tilde{X}$ заключаем, что $x \in \tilde{X}$. Ввиду произвольности выбора точки x, имеет место включение $(a, b) \subset \tilde{X}$. Таким образом, разность $\{(a, b) \cap T \subset \tilde{X}\} \setminus \{(a, b) \subset \tilde{X}\}$ не содержит незамкнутых реализаций $\tilde{X}$, для которых имеет место $\mathrm{cl}(\tilde{X}) \setminus \tilde{X} \neq \varnothing$. Откуда следует включение (9). ■

Разумеется, что обратное утверждение не справедливо, т.е. свойство (8) не является достаточным для замкнутости случайного множества, так как для её обеспечения, в частности, нужно чтобы событие $\{(a, b) \subset \tilde{X}\}$ и событие $\{[a, b] \subset \tilde{X}\}$ имели одну и ту же вероятность, а это свойство не гарантируется формулой (8). Однако, доказанная лемма влечёт

Следствие. *Достаточным условием сепарабельности относительно счётного, всюду плотного в W множества T (вообще, сепарабельности) случайных замкнутых множеств является выполнимость условия (8) (выполнимость (8) при любых T с $\mathcal{N}_T$, не зависящем от T), а именно, если случайное множество с вероятностным пространством $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q}\rangle$ замкнуто и имеет место включение (8) (с $\mathcal{N}_T$, не зависящем от T), то существует такое случайное событие $\mathcal{N}_T$ (событие $\mathcal{N}$) с $\mathsf{Q}(\mathcal{N}_T) = 0$ (с $\mathsf{Q}(\mathcal{N}) = 0$), для которого при любых $a, b \in W$, $a < b$ имеет место включение (9) (включение (9), в котором $\mathcal{N}_T$ заменено на $\mathcal{N}$), и, следовательно, это случайное множество сепарабельно относительно T (вообще, сепарабельно).*

□ Если $\mathcal{N}_T$, указанное в условии леммы, существует, то, заменив в правой части включения (8) событие $\mathcal{N}_T$ на $\mathcal{N}_T \cup \mathcal{N}'$, где $\mathcal{N}' = \{\mathrm{cl}(\tilde{X}) \setminus \tilde{X} \neq \varnothing\}$, получим верное включение. При этом $\mathsf{Q}(\mathcal{N}_T \cup \mathcal{N}') \leqslant \mathsf{Q}(\mathcal{N}_T) + \mathsf{Q}(\mathcal{N}') = 0$. Согласно же утверждению леммы включение (7) выполняется при подстановке в его правую часть события $\mathcal{N}'$, и поэтому оно тем более выполняется, если заменить правую часть этого включения на $\mathcal{N}' \cup \mathcal{N}_T$. Отсюда, в силу Леммы 4, следует сепарабельность случайного множества $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q}\rangle$ относительно выбранного множества T. Если же $\mathcal{N}_T$ не зависит от T, то множество $\mathcal{N}' \cup \mathcal{N}_T$ в правых частях видоизменённых указанным образом включений (7) и (8) также не зависит от T, и, в этом случае, случайное множество сепарабельно в общем смысле. ■

Теперь мы в состоянии доказать основное утверждение настоящей работы.

Теорема 3. *Для сепарабельности случайного замкнутого множества $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$ относительно счётного, всюду плотного в W множества T необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство*

$$\Pr\{\mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) = \tilde{X}\} = 1\,. \tag{10}$$

□ 1. Докажем достаточность условия (10). Пусть случайное множество с множеством случайных реализаций $\tilde{X} \in \Sigma$ замкнуто, и пусть имеет место

$$\Pr\{\mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) = \tilde{X}\} = 1$$

для фиксированного множества сепарабельности T. Тогда класс $\{\mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) \setminus \tilde{X} \neq \varnothing\} \cup \{\tilde{X} \setminus \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) \neq \varnothing\}$ имеет нулевую вероятность. На основании следствия Леммы 4, достаточно проверить, что для таким образом выбранного случайного события $\mathcal{N}_T$ и для любого интервала (a, b) выполняется включение (8). Покажем, что это включение выполняется, если это событие заменить на более широкое и положить

$$\mathcal{N}_T = \{\tilde{X} \setminus \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) \neq \varnothing\}\,. \tag{11}$$

Рассмотрим фиксированный интервал (a, b). Докажем сначала, что имеет место

$$\{\tilde{X} \cap (a,b) \cap T = \varnothing\} \setminus \{\tilde{X} \cap (a,b) = \varnothing\} \subset \{(\tilde{X} \cap [a,b]) \setminus \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap (a,b) \cap T) \neq \varnothing\}\,. \tag{12}$$

Пусть $\tilde{Z}$ – реализация, принадлежащая классу в левой части этого включения. Тогда, ввиду тождества

$$\{(\tilde{X} \cap (a,b) \cap T) = \varnothing\} \setminus \{\tilde{X} \cap (a,b) = \varnothing\} =$$
$$= \{\tilde{X} \cap (a,b) \cap T = \varnothing, \tilde{X} \cap (a,b) \neq \varnothing\}\,,$$

для этой реализации имеют место $\tilde{Z} \cap (a,b) \cap T = \varnothing$ и $\tilde{Z} \cap (a,b) \neq \varnothing$. Применив операцию замыкания к первому равенству и усилением второго неравенства, получаем соотношения $\mathrm{cl}(\tilde{Z} \cap (a,b) \cap T) = \varnothing$ и $\tilde{Z} \cap [a,b] \neq \varnothing$. Тогда реализация $\tilde{Z}$ содержится в классе правой части включения (12). Ввиду произвольности реализации $\tilde{Z}$ имеет место (12).

Докажем теперь, что справедливо включение

$$\{(\tilde{X} \cap [a,b]) \setminus \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap (a,b) \cap T) \neq \varnothing\} \subset \{\tilde{X} \setminus \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) \neq \varnothing\}\,. \tag{13}$$

Пусть снова $\tilde{Z}$ – произвольная реализация из класса в левой части. Для неё одновременно выполняются два соотношения

$$(\tilde{Z} \cap [a,b]) \setminus \mathrm{cl}(\tilde{Z} \cap (a,b) \cap T) = \varnothing\,, \quad \tilde{Z} \cap [a,b] \neq \varnothing\,.$$

Пусть z – произвольная точка из $\tilde{Z}$. Тогда $z \in \tilde{Z} \cap [a,b]$ и $z \notin \mathrm{cl}(\tilde{Z} \cap (a,b) \cap T)$. Следовательно, эта точка принадлежит $\tilde{Z}$ и является внутренней точкой отрезка $[a,b]$. Допустим, что $z \in \mathrm{cl}(\tilde{Z} \cap T)$. В этом случае найдётся последовательность $\langle z_n \in \tilde{Z} \cap T; n \in \mathbb{N}\rangle$, сходящаяся к z. Причём, так как $z \in (a,b)$, то все члены этой последовательности могут быть выбраны внутри этого интервала. Но в этом случае точка z обязана принадлежать $\mathrm{cl}(\tilde{Z} \cap (a,b) \cap T)$, вопреки предположению. Полученное противоречие доказывает, что $z \notin \mathrm{cl}(\tilde{Z} \cap T)$. Поэтому она принадлежит множеству $\tilde{Z} \setminus \mathrm{cl}(\tilde{Z} \cap T)$. Произвольность точки z доказывает включение (13).

Последовательно применяя включения (12), (13) получаем включение (8)

$$\{(\tilde{X} \cap (a,b) \cap T) = \varnothing\} \setminus \{\tilde{X} \cap (a,b) = \varnothing\} \subset \mathcal{N}_T\,,$$

в котором событие $\mathcal{N}_T$ выбрано в форме (11).

2. Докажем необходимость условия (10), то есть утверждение: если множество замкнуто и имеют место включения (7) и (8) относительно некоторого фиксированного счётного, всюду плотного в W множества T, то имеет место $\Pr\{\mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) = \tilde{X}\} = 1$.

Доказательство разобьём на несколько отдельных пунктов.

A. Допустим противное, что равенство (10) не имеет места, а, наоборот, справедливо

$$\Pr\{\mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) = \tilde{X}\} < 1\,.$$

Тогда обязательно выполняется одно из неравенств

$$\Pr\{\tilde{X} \setminus \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) \neq \varnothing\} > 0\,, \quad \Pr\{\mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) \setminus \tilde{X}\} > 0\,. \tag{14}$$

Покажем сначала, что второе из этих неравенств невозможно. Так как случайное множество замкнуто, то $\Pr\{\mathrm{cl}(\tilde{X}) = \tilde{X}\} = 1$, и, следовательно,

$$\Pr\{\mathrm{cl}(\tilde{X}) \setminus \tilde{X} \neq \varnothing\} = 0\,. \tag{15}$$

Ввиду включения $\tilde{X} \cap T \subset \tilde{X}$, которое влечёт $\mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) \subset \mathrm{cl}(\tilde{X})$, $\mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) \setminus \tilde{X} \subset (\mathrm{cl}(\tilde{X}) \setminus \tilde{X})$, имеет место включение для класса реализаций

$$\{\mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) \setminus \tilde{X} \neq \varnothing\} \subset \{\mathrm{cl}(\tilde{X}) \setminus \tilde{X} \neq \varnothing\}\,.$$

Следовательно, в силу (15), имеет место

$$\Pr\{\mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) \setminus \tilde{X} \neq \varnothing\} = 0\,.$$

B. Допустим теперь, что имеет место первое из неравенств (14). Пусть с положительной вероятностью для реализаций $\tilde{X}$ рассматриваемого случайного множества выполняется неравенство $\tilde{X} \setminus \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) \neq \varnothing$. Тогда найдётся достаточно большое число $m \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\Pr\{(\tilde{X} \setminus \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T)) \cap (-m, m] \neq \varnothing\} > 0\,.$$

Поэтому далее, не ограничивая общности рассуждений, мы рассматриваем только части каждой из реализаций $\tilde{X}$, содержащиеся в $(-m, m]$, обозначая их, по прежнему, посредством $\tilde{X}$.

C. Докажем, что если $\tilde{Y} = \tilde{X} \setminus \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T) \neq \varnothing$ с положительной вероятностью, то, с той же вероятностью, каждая точка $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ обладает такой окрестностью $(\tilde{y} - \varepsilon(\tilde{y}), \tilde{y} + \varepsilon(\tilde{y}))$ с $\varepsilon(\tilde{y}) > 0$, которая не пересекается с $\tilde{X} \cap T$.

Допустим противное, то есть что для любого сколь угодно малого $\varepsilon_n > 0$ всегда найдётся точка $\tilde{x}_n \in \tilde{X} \cap T$, $n \in \mathbb{N}$, которая принадлежит интервалу $(\tilde{y} - \varepsilon_n, \tilde{y} + \varepsilon_n)$. Тогда последовательность $\langle \tilde{x}_n \in \tilde{X} \cap T; n \in \mathbb{N} \rangle$ сходится к $\tilde{y}$,

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{x}_n = \tilde{y}\,.$$

Следовательно, $\tilde{y} \in \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T)$, что противоречит выбору точки $\tilde{y}$.

D. На основании п.**C**, сопоставим каждой точке $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ интервал $(a(\tilde{y}), b(\tilde{y}))$ с

$$a(\tilde{y}) = \inf\{\tilde{y} - \varepsilon(\tilde{y}) : \varepsilon(\tilde{y}) \geqslant 0, (\tilde{y} - \varepsilon(\tilde{y}), \tilde{y}) \cap \tilde{X} \cap T = \varnothing\}\,,$$

$$b(\tilde{y}) = \sup\{\tilde{y} + \varepsilon(\tilde{y}) : \varepsilon(\tilde{y}) \geqslant 0, (\tilde{y}, \tilde{y} + \varepsilon(\tilde{y})) \cap \tilde{X} \cap T = \varnothing\}\,,$$

Определим теперь функцию от $\tilde{y} \in \tilde{Y}$,

$$h(\tilde{y}) = \min\{\tilde{y} - a(\tilde{y}), b(\tilde{y}) - \tilde{y}\}\,,$$

которая является положительной с положительной вероятностью, и, на её основе, введём существующую с той же вероятностью строго положительную случайную величину

$$\tilde{h} = \sup\{h(\tilde{y}) > 0 : \tilde{y} \in \tilde{X} \setminus \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T)\}\,.$$

E. Выберем число $n \in \mathbb{N}$ настолько большим, чтобы имело место неравенство $\Pr\{\tilde{h} \geqslant 2\delta\} > 0$, где $\delta = m/n$, и разобьём полуинтервал $(-m, m]$ на $2n$ дизъюнктивных полуинтервалов Δ_j, $j = 1 \div 2n$ одинаковой длины.

Согласно проделанному построению, для зафиксированного $n \in \mathbb{N}$ непусто с положительной вероятностью множество $\tilde{Y}_\delta \subset \tilde{Y}$ таких точек $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, для которых $\tilde{h}(\tilde{y}) \geqslant \delta$. Тогда, по крайней мере, хотя бы для одного номера $j = 1 \div 2n$, положительна вероятность $\Pr\{\tilde{h} \geqslant 2\delta, \tilde{Y}_\delta \cap \Delta_j \neq \varnothing\}$. Это связано с тем, что события $\{\tilde{h} \geqslant 2\delta, \tilde{Y}_\delta \cap \Delta_j \neq \varnothing\}$, с разными номерами $j = 1 \div 2n$ попарно несовместимы и

$$\bigcup_{j=1}^{2n} \{\tilde{h} \geqslant 2\delta, \tilde{Y}_\delta \cap \Delta_j \neq \varnothing\} = \{\tilde{h} \geqslant 2\delta, \tilde{Y}_\delta \neq \varnothing\}\,.$$

Не ограничивая общности, будем далее считать, что таким номером является $j = 1$. Таким образом,

$$\Pr\{\tilde{h} \geqslant 2\delta, \tilde{Y}_\delta \cap \Delta_1 \neq \varnothing\} > 0\,.$$

F. Выбросим левую концевую точку из полуинтервала Δ_1 и обозначим получившийся интервал $\bar{\Delta}_1$. Допустим, что $\tilde{X} \cap T \cap \bar{\Delta}_1 \neq \varnothing$ и $\tilde{x}$ – точка, принадлежащая этому множеству. Выберем произвольную точку $\tilde{y} \in \tilde{Y}_\delta \cap \Delta_1$. Тогда, согласно построению множества $\tilde{Y}_\delta$, имеет место $h(\tilde{y}) \geqslant \delta$ и, следовательно, $a(\tilde{y}) \leqslant \tilde{y} - \delta$, $b(\tilde{y}) \geqslant \tilde{y} + \delta$, так как точка $\tilde{x}$ должна лежать вне интервала $(a(\tilde{y}), b(\tilde{y}))$. Поэтому $\tilde{x} \leqslant a(\tilde{y}) < \tilde{y} - \delta$, либо $\tilde{x} \geqslant b(\tilde{y}) > \tilde{y} + \delta$, и, в любом случае, $|\tilde{x} - \tilde{y}| > \delta$, что противоречит выбору точки $\tilde{x}$. Следовательно,

$$\tilde{X} \cap T \cap \bar{\Delta}_1 = \varnothing$$

с положительной вероятностью.

G. По построению

$$\{\tilde{X} \cap \bar{\Delta}_1 = \varnothing\} \cap \{\tilde{Y}_\delta \cap \Delta_1 \neq \varnothing\} = \varnothing\,,$$

$$\{\tilde{X} \cap T \cap \bar{\Delta}_1 = \varnothing\} \cap \{\tilde{Y}_\delta \cap \Delta_1 \neq \varnothing\} = \{\tilde{Y}_\delta \cap \Delta_1 \neq \varnothing\}\,.$$

Тогда

$$\Big(\{\tilde{X} \cap T \cap \bar{\Delta}_1 = \varnothing\} \setminus \{\tilde{X} \cap \bar{\Delta}_1 = \varnothing\}\Big) \cap \{\tilde{Y}_\delta \cap \Delta_1 \neq \varnothing\} = \{\tilde{Y}_\delta \cap \Delta_1 \neq \varnothing\}\,.$$

Так как последнее событие имеет положительную вероятность, то событие $\{\tilde{X} \cap T \cap \bar{\Delta}_1 = \varnothing\} \setminus \{\tilde{X} \cap \bar{\Delta}_1 = \varnothing\}$ не может иметь нулевую вероятность. Таким образом, не выполнено одно из необходимых условий (8) сепарабельности для интервала $\bar{\Delta}_1$. ■

Доказанная теорема означает, что определение сепарабельности случайного множества на основе сепарабельности соответствующего ему индикаторного случайного процесса эквивалентно следующему определению.

Определение 6 ([3], с.69). *Случайное замкнутое множество* $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$ *называется сепарабельным в* W *по Матерону относительно счётного, всюду плотного множества* $T \subset W$, *если выполняется* $\mathsf{Q}\left(\{\tilde{X} = \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T)\}\right) = 1$. *Множество* T *называется множеством сепарабельности случайного замкнутого множества* $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$.

Если равенство $\mathsf{Q}(\{\tilde{X} = \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap T)\}) = 1$ *имеет место для любого счётного, всюду плотного в* W *множества* T, *то случайное множество* $\langle \Sigma, \mathfrak{B}, \mathsf{Q} \rangle$ *называется сепарабельным по Матерону (в общем смысле).*

Литература

1. Choquet G. Theory of capacities // Ann. Inst. Fourier. – 1953. – **5**. – P.131-295.

2. Kendall D.G. Foundations of theory of random sets // Stochastic Geometry. – Wiley, New York, 1974. – P.322-376.

3. Матерон Ж. Случайные множества и интегральная геометрия // Ж.Матерон. – М.: Мир, 1978. – 320 с.

4. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов // И.И. Гихман. – М.: Наука, 1977. – 568 с.

5. Дуб Дж. Вероятностные процессы // Дж. Дуб. – М.: ИЛ, 1956. – 604 с.

6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа // А.Н. Колмогоров. – М.: Наука, 1972. – 496с.

7. Амбарцумян Р.В., Мекке Й., Штойян Д. Введение в стохастическую геометрию // Р.В. Амбарцумян. – М.: Наука, 1989. – 400 с.

INDICATOR RANDOM PROCESS AND SEPARABLE RANDOM CLOSED SETS

Yu.P. Virchenko, O.L. Shpilinskaya

Belgorod State University,

Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru
Single Crystal Institute of NASU,

Lenin Av., 60, Kharkov, Ukraine, e-mail: spilolga@isc.kharkov.ua

Abstract. The connection between closed random sets in $\mathbb{R}$ and their indicator random processes is studied. It is proved that the separability of the indicator process corresponding to the closed random set is necessary and sufficient for the set separability which is understood by Matheron.

Key words: random sets, indicator processes, separability.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Алексеева О.В.	–	аспирант Елецкого государственного университета им. И.А.Бунина
Антонова Е.С.	–	аспирант Белгородского государственного университета
Бабаев А.Н.	–	аспирант Белгородского государственного университета
Вирченко Ю.П.	–	доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретической и математической физики Белгородского государственного университета
Глушак А.В.	–	доктор физико-математических наук, декан математического факультета Белгородского государственного университета
Гриценко Св.А.	–	старший преподаватель математического факультета Белгородского государственного университета
Данилец И.В.	–	аспирант Белгородского государственного университета
Демидов Д.Б.	–	аспирант Белгородского государственного университета
Зимин Р.Н.	–	аспирант Белгородского государственного университета
Ковалёва Л.А.	–	аспирант Белгородского государственного университета
Манаенкова Т.А.	–	аспирант Белгородского государственного университета
Мейрманов А.М.	–	доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики Белгородского государственного университета
Полунин В.А.	–	аспирант Белгородского государственного университета

Некрасова И.В. – аспирант Белгородского государственного университета

Солдатов А.П. – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа Белгородского государственного университета

Хасанова С.Л. – аспирант Стерлитамакской педагогической академии им. Зейнаб Биишевой

Шерияздан Т.Т. – аспирант Актюбинского государственного университета им. К. Жубанова (г. Актобе)

Шпилинская О.Л. – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Института монокристаллов НАНУ (г. Харьков)

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал «Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика, Физика» выходит четыре раза в год. Два выпуска журнала посвящены чисто математическим работам и два – работам по физике и прикладной математике.

Редколлегия журнала принимает от авторов рукописи статей, написанные на русском или на английском языках, по различным разделам математики и физики. Содержание статей может содержать как результаты оригинальных исследований автора (ов), так и представлять собой обзор по выбранной автором (ами) теме.

Статья должна быть написана с достаточной степенью подробности и с таким расчётом, чтобы быть понятной не только узким специалистам по выбранному автором (ами) направлению исследований, но более широкому кругу математиков и(или) физиков. Ни в коем случае рукопись не должна представлять собой краткий отчёт о проведенных исследованиях, написанный в виде краткого сообщения, не содержащий описания постановки задачи (условий проведения эксперимента, если это экспериментальная работа по физике). В связи с этим, рукопись должна быть структурирована — разделена на разделы, представляющие отдельные смысловые единицы текста. В любом случае, рукопись должна содержать введение и заключение. Разделы должны быть пронумерованы и иметь заголовки.

Во введении должны быть описаны: проблема, которой посвящена рукопись, определено место этой проблемы в общем объёме физико-математического знания, представлены краткая история вопроса и полученный автором (ами) результат. В заключении работы должна быть дана характеристика полученного результата с указанием его значения для дальнейшего развития темы исследования.

Те же самые требования к введению и заключению предъявляются и для обзорной статьи, с той лишь разницей, что их содержание должно быть посвящено описанию всей совокупности результатов, отражающих состояние выбранной автором области исследований, и сам текст должен быть написан с большей степенью подробности.

Возможна также публикация статьи, носящей методический характер. Но в этом случае решение о возможности публикации такой рукописи принимается редколлегией отдельно.

Рукопись должна быть оформлена в соответствии с традициями написания, соответственно, математических и физических текстов. В частности, в математических текстах должны быть чётко выделены такие структурные единицы, как формулировки определений, теорем и лемм, следствий и замечаний, отмечены начала и окончания доказательств.

Полный объём рукописи, которая представляет собой оригинальное исследование, не должен превышать 20 страниц формата А4. Она должна быть написана шрифтом 14pt через два интервала. Объём обзорной статьи необходимо заранее оговорить с редколлегией журнала.

После подготовки одним из членов редколлегии заключения о соответствии рукописи нормам журнала "Научные ведомости"она рассматривается на общем собрании редколлегии. В отдельных случаях редколлегией может быть принято решение о более тщательном изучении рукописи внешним (не входящем в состав редколлегии журнала) рецензентом. Редколлегия оставляет за собой право на мелкие стилистические исправления текста рукописи после принятия решения о её публикации.

В редакцию присылаются следующие файлы:

1) основная содержательная часть, представляемая на русском или английском языках. При этом название статьи должно состоять не более чем из 20 слов.

2) номер УДК того научного направления, которому посвящена статья;

3) список авторов с указанием порядка их размещения при публикации статьи;

4) аннотация на русском языке; её объём не должен превышать 10-12 строк, написанных шрифтом 12pt;

5) список ключевых слов (не более 10-12);

6) текст перевода заголовка статьи, аннотации и ключевых слов на английском языке;

7) список литературных источников, на которые имеются ссылки в тексте рукописи;

8) данные об авторах статьи с указанием места их работы, точного почтового адреса и занимаемой должности. Должны быть указаны адреса электронной почты. Эти данные необходимо представить также на английском языке. Кроме того, должна быть дана латинская транскрипция фамилий авторов. Соответственно, для статей на английском языке должна быть дана транскрипция фамилий авторов кириллицей;

9) списка подписей к рисункам, если они имеются в рукописи.

В редакцию присылается электронный вариант рукописи. Он должен быть подготовлен в редакторе LaTeX (LaTeX2e, AMSLaTeX). При этом нужно также прислать файл с pdf-копией рукописи для того, чтобы редакция имела возможность сравнения его с авторским оригиналом при редактировании.

Особое внимание должно быть уделено рисункам, если они имеются в рукописи. Они должны быть качественно оформлены и приготовлены в виде отдельных электронных файлов в формате "ps"(можно также присылать файлы рисунков в формате "eps но при этом нужно проследить, чтобы они были приготовлены в "векторном формате то есть так, чтобы их можно было транслировать в формат "ps"). Файлы рисунков необходимо пронумеровать в соответствии со списком подписей к рисункам (см. п.7).

Внимание!

1. На представляемых в электронном формате рисунках не следует наносить те комментирующие их подписи, которые присылаются в редколлегию отдельным списком.

2. Если в тексте работы есть таблицы, то их следует формировать на основе программы LaTeX и ни в коем случае не оформлять в виде рисунков.

Обращаем внимание авторов на то, что список литературы должен быть оформлен строго в соответствии с существующим ГОСТом. При этом нужно обратить особое внимание на то, чтобы были указаны полные названия журнальных статей и статей в сборниках, на которые есть ссылки в тексте рукописи, а также указаны не только начальные страницы этих статей, но обязательно также и конечные. Каждая из монографий в списке цитируемой литературы обязательно должна быть дана с указанием полного числа страниц.

Особые требования к электронному набору в редакторе LaTeX (LaTeX, AMS LaTeX) следующие:

1) нельзя использовать вводимые авторами новые нестандартные команды;

2) выключные формулы должны быть пронумерованы в порядке их появления в рукописи в том случае, если на них есть ссылки в тексте. При использовании режима equation для набора выключных формул обязательно употребление для их нумерации соответствующих номеров формул в тексте. Допускается применение для меток формул цифр, снабжённых штрихами (или цифр совместно с буквами латинского алфавита). Однако этим нужно пользоваться только в случае крайней необходимости с целью более точной передачи смысла текста;

3) в случае, если в статье имеются разделы в виде *приложений* в конце основного текста работы, нумерация содержащихся в них выключных формул может быть независимой от нумерации основного текста. При этом в приложениях рекомендуется употребление двойной нумерации, в которой первый символ может быть прописной буквой или номером приложнения. Каждый из разделов-приложений начинается словом ПРИЛОЖЕНИЕ с порядковым номером этого приложения. Это слово должно быть выровнено по правому полю страницы. Затем следует заголовок этого приложения;

4) литературные источники в ссылках на основе команд ref или cite в электронном тексте рукописи нужно обозначать цифрами, соответствующими их порядковому номеру появления в тексте, и ни в коем случае не использовать метки другого типа.